Zur analytischen Geometrie der dualen Größen.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der hohen naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard - Karls - Universität Tübingen

vorgelegt von

Christian Betsch.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Druck von Robert Noske, Borna-Leipzig
Großbetrieb für Dissertationsdruck
1918.

Von der Fakultät angenommen
30. Juli 1917.

Berichterstatter: Prof. Dr. v. Brill.

Meinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. v. Brill

in Dankbarkeit gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548026_0109

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

I. Metrische Geometrie dualer Größen.

1. Die arithmetischen Eigenschaften dualer Größen 3
2. Dualer Punkt und duale Gerade; Träger und Netz; Kernpunkt und Bildpunkt, Kerngerade und Bildgerade 4
3. Transfinite und unendlich ferne Gerade; transfinite und unendlich ferne duale Punkte 6
4. Ausgeartete Punkte und Gerade 8
5. Beziehungen zwischen dualen Punkten und ihren Netzen, dualen Geraden und ihren Trägern 9
6. Duale Linienkoordinaten 11
7.—9. Gerade durch zwei duale Punkte, Schnitt zweier dualer Geraden 11
10.—12. Geometrische Konstruktionen 15
13.—15. Ausdehnung der vorausgehenden Untersuchungen auf den Raum 19
16. Anordnung der Punkte einer dualen Geraden und der Strahlen eines Büschels 22
17. Metrische Formeln 23
18. Einführung neuer Koordinatensysteme 26
19. Die duale Geometrie und das Axiom des Archimedes 28

II. Projektive Geometrie dualer Größen.

20. Definition projektiver Grundgebilde erster Stufe 29
21. Das duale Doppelverhältnis 29
22. Strahlbüschel; Beziehung zwischen dualen Punkten und ihren Netzen 31
23. Harmonische Punkte und Strahlen 32
24.—25. Dual-projektive Transformationen der Geraden 33
26. Doppelelemente kollokaler projektiver Grundgebilde erster Stufe 35
27. Die radial-projektiven Transformationen der Geraden 37
28. Dual- und radial-projektive Transformationen der Ebene . . . 38
29. Einführung projektiver Koordinaten 39

Seite

III. Die Geometrie dualer Größen und die Strahlengeometrie des Raums.

30. Duale Punkte auf der dualen Kugel und ihre Beziehungen zu den dualen Punkten der Ebene und den Strahlen des Raums 44
31. Zuordnung von Strahlen des Raums und dualen Punkten der Ebene 49
32. Die Strahlenkongruenzen 50
33. Duale Kurven 50
34. Die konischen Strahlenkongruenzen und die dualen Kurven 2. Ordnung 51
35. Darstellung der Bildkurve der dualen Ellipse in Punktkoordinaten 55
36. Die absolute Kongruenz und der absolute duale Kreis 57
37. Sätze über konische Kongruenzen; reziproke und polare Kongruenz 57
38. Projektive Strahlenkoordinaten im Raum 59
39. Die ∞^6 Somentransformationen und die ∞^6 Bewegungen eines starren Körpers 59
40. Invarianz des absoluten dualen Kreises gegenüber den Transformationen von G_6 und G_7 61

Einleitung.

D. Hilbert hat in seinen „Grundlagen der Geometrie“ gezeigt, daß es Geometrien gibt, in denen sämtliche Axiome der gewöhnlichen euklidischen Geometrie, abgesehen vom Axiom des Archimedes, gültig sind. Während schon vor ihm Veronese[1]) den Versuch machte, die ganze Geometrie ohne Benützung des archimedischen Axioms synthetisch zu begründen, entwickelt D. Hilbert in diesem Werk (§ 12) eine nichtarchimedische Geometrie auf analytischem Weg unter Benützung eines komplexen Zahlsystems von unendlich vielen Einheiten. Ein derartiges nichtarchimedisches Zahlsystem bezeichnet Hahn[2]) als Zahlsystem vom Klassentypus ∞.

Um geometrische Konstruktionen anschließen zu können, scheint es notwendig zu sein, ein Zahlsystem von endlichem Klassentypus zugrunde zu legen.

C. Segre[3]) benützt ein Zahlsystem mit zwei Einheiten: 1 und ε, das er nach dem Vorgang von E. Study als duales Zahlsystem bezeichnet. Seine Ausführungen, besonders soweit sie sich auf die projektive Geometrie beziehen, bilden die allgemeinen Grundlagen der dualen Geometrie. Er setzt $\varepsilon^2 = g\varepsilon + h$; der Spezialfall $\varepsilon^2 = 0$ kann aber nicht durch einfachen Grenzübergang gewonnen werden.

P. Predella[4]) entwickelt auf synthetischem Weg eine nichtarchimedische Geometrie und legt dann den kurzen analytischen Ausführungen im zweiten Teil seiner Abhandlung das spezielle duale Zahlsystem, für das $\varepsilon^2 = 0$ ist, zugrunde. Sein duales Punktsystem ist kein abgeschlossenes Kontinuum, da er

---

[1]) Grundzüge der Geometrie, deutsch von Schepp, Leipzig 1894.

[2]) Über nichtarchimedische Größensysteme; Sitzungsberichte der Akademie Wien 116, 1907.

[3]) Le Geometrie projettive nei campi di numeri duali; Atti Acc. Torino 47, 1912.

[4]) Saggio di Geometria Non-Archimedea. I. Giorn. Battaglini 49, 1911; II u. III Bona, Torino 1911/12.

unendlich ferne Bildpunkte ausschließt; der Fall, daß die skalaren Bestandteile der drei homogenen Koordinaten eines dualen Punktes sämtlich verschwinden, kann nicht auftreten [5]). Infolgedessen kann sein Punktsystem den Strahlen des Raums nicht zugeordnet werden, weil die unendlich fernen Strahlen darin keinen Platz haben.

Grünwald [6]) ordnet die dualen Zahlen den Punkten eines Kegels 2. Ordnung zu und führt zu diesem Zweck unendlich große duale Zahlen ein.

Die vorliegende Arbeit versucht, die Theorie der dualen Größen auf arithmetischer Grundlage zu entwickeln. Dehnt man die algebraischen Operationen, welche die gewöhnliche analytische Geometrie an die Begriffe Punkt, gerade Linie, Ebene und die Gleichungen zwischen ihnen anschließt, auf die entsprechenden dualen Gebilde und Gleichungen aus, so erhält man Sätze, die zu einer konstruktiven und einer metrischen Geometrie dieser Gebilde führen. Dies wird im I. Teil entwickelt und im II. Teil einer projektiven Geometrie der dualen Gebilde zugrunde gelegt. Durch Einführung der Begriffe „Netz eines dualen Punktes", „Träger einer dualen Geraden", d. h. durch Übergang zu den entsprechenden dualistischen Gebilden, wird die Einführung unendlich großer dualer Zahlen vermieden.

Im III. Teil wird gezeigt, wie man diese duale Geometrie der Ebene auf die „duale Kugel" abbilden und der Strahlengeometrie des Raums, wie sie E. Study [7]) entwickelte, zuordnen kann. Jedem dualen Punkt entspricht eineindeutig ein Strahl, einer dualen Kurve eine Strahlenkongruenz. Dieses Abbildungsprinzip wird zu einer reichfließenden Quelle geometrischer Sätze über Strahlenkongruenzen, von denen nur einige über konische Kongruenzen, die den dualen Kurven 2. Grads entsprechen, angeführt werden. In den letzten Abschnitten wird die duale Geometrie mit der Theorie der Bewegungen im euklidischen Raum in Zusammenhang gebracht.

---

[5]) s. Abschnitt 4.

[6]) Duale Zahlen in der Geometrie (Monatshefte für Mathematik und Physik 1906).

[7]) Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903.

I. Metrische Geometrie dualer Größen.

1. Wir beginnen mit einer kurzen Zusammenstellung der bekannten arithmetischen Eigenschaften dualer Größen. Da sie einen speziellen Fall der von H. Graßmann in seiner Ausdehnungslehre untersuchten extensiven Größen darstellen, gelten für sie dieselben allgemeinen Gesetze. Beschränkt man sich auf zwei Einheiten, so bekommt man die Größen vom Typus $x\varepsilon_0 + y\varepsilon_1$, die von E. Study duale Zahlen genannt wurden.

Die Multiplikation dualer Größen ergibt sich aus den Gesetzen der algebraischen Multiplikation extensiver Größen, d. h. es ist $\varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_1\varepsilon_0$ zu setzen[1]). Um die Produkte der Einheiten auf die ursprünglichen Einheiten zurückzuführen, werden für die speziellen dualen Größen die Bedingungsgleichungen

$$\varepsilon_0^2 = \varepsilon_0; \quad \varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_1; \quad \varepsilon_1^2 = 0$$

aufgestellt; daraus ergeben sich leicht die übrigen Rechenregeln[2]). Wir setzen im folgenden $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_1 = \varepsilon$ und bezeichnen nach E. Study x als den skalaren, $y\varepsilon$ als den vektoriellen Bestandteil der dualen Zahl $x + y\varepsilon$[3]).

Der Division wird die Beschränkung auferlegt, daß der skalare Bestandteil des Nenners nicht 0 werden darf. Es hat sich noch das Bedürfnis der folgenden Bezeichnung eingestellt:

---

[1]) H. Graßmann, Ausdehnungslehre; ferner Grelles Journal Bd. 49; Schlegel, System der Raumlehre, Leipzig 1872—1875.

[2]) Nach der von Scheffers für komplexe Zahlsysteme eingeführten Bezeichnungsweise ist das hier aufgestellte irreduzible Zahlsystem als Nichtquaternionensystem zu bezeichnen. Seine charakteristische Gleichung ist $(x - y\varepsilon)^2 = 0$; sein Modul 1 (Math. Annalen Bd. 39 S. 293—390).

[3]) E. Study, Geometrie der Dynamen § 23.

Ist A eine beliebige duale Zahl, so wird diejenige duale Zahl mit $\overline{A}$ bezeichnet, die der Gleichung

$$A = \overline{A} \cdot (1 + \varepsilon)$$

genügt.

2. Die Definition des Punktes der Ebene, der in der gewöhnlichen Geometrie durch die Verhältnisse dreier reeller Zahlen x_1, x_2, x_3, seine homogenen Koordinaten, bestimmt ist, erhält bei Einführung dualer Größen folgende Fassung:

Die Verhältnisse dreier dualer Zahlen $X_1 = x_1 + y_1 \varepsilon$
$X_2 = x_2 + y_2 \varepsilon$
$X_3 = x_3 + y_3 \varepsilon$,

deren skalare Bestandteile nicht verschwinden, definieren einen dualen Punkt der Ebene. Die drei dualen Größen, die noch mit einem beliebigen dualen Faktor $\varrho = \varrho_0 + \varrho_1 \varepsilon \, (\varrho_0 \neq 0)$ multipliziert werden können, werden seine homogenen Koordinaten genannt.

Entsprechend nennen wir duale Gerade die Gesamtheit der ∞^2 dualen Punkte, deren Koordinaten einer linearen dualen Gleichung

$$(u_1 + v_1 \varepsilon)(x_1 + y_1 \varepsilon) + (u_2 + v_2 \varepsilon)(x_2 + y_2 \varepsilon) + (u_3 + v_3 \varepsilon)(x_3 + y_3 \varepsilon) = 0$$

genügen; sie ist bestimmt, wenn man die Verhältnisse der drei dualen Größen

$$U_1 = u_1 + v_1 \varepsilon$$
$$U_2 = u_2 + v_2 \varepsilon$$
$$U_3 = u_3 + v_3 \varepsilon$$

kennt. Faßt man diese drei Größen als homogene Koordinaten eines Punktes auf[1]), so läßt sich eine eineindeutige Zuordnung von dualen Punkten und dualen Geraden treffen: Durch jede duale Gerade $U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0$ ist ein dualer Punkt mit den homogenen Koordinaten U_1, U_2, U_3 bestimmt; er wird im folgenden der Träger der dualen Geraden genannt.

[1]) Duale Linienkoordinaten werden in Abschnitt 6 eingeführt.

Umgekehrt ist durch die drei homogenen Koordinaten X_1', X_2', X_3' eines dualen Punktes die duale Gerade

$$X_1' X_1 + X_2' X_2 + X_3' X_3 = 0$$

bestimmt, sie wird das Netz des dualen Punktes genannt.

Dividiert man die drei homogenen Koordinaten X_1', X_2', X_3' eines dualen Punktes durch

$$k \overline{X}_3' = k[x_3' + (y_3' - x_3')\varepsilon]$$

und setzt

$$\frac{1}{k} = x_3 = y_3,$$

so erhalten seine Koordinaten die Form

$$X_1 = x_1 + y_1 \varepsilon$$
$$X_2 = x_2 + y_2 \varepsilon$$
$$X_3 = x_3 + y_3 \varepsilon,$$

wobei $x_3 = y_3$ ist.

Dann kann der duale Punkt der Ebene durch zwei gewöhnliche Punkte mit den homogenen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) dargestellt werden. Der Punkt (x_1, x_2, x_3) werde der Kernpunkt, (y_1, y_2, y_3) der Bildpunkt des dualen Punktes genannt[1]).

Damit ist eine eineindeutige Beziehung zwischen den dualen Größen X_1, X_2, X_3 und dem Punktepaar der Ebene, das den dualen Punkt geometrisch repräsentiert, hergestellt.

Dividiert man in derselben Weise die duale Gleichung

$$U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0 \text{ mit } k \overline{X}_3$$

und zerlegt die erhaltene duale Gleichung in die beiden gewöhnlichen Gleichungen

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \qquad (1)$$
$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0, \qquad (2)$$

so werde die durch (1) dargestellte Gerade die Kerngerade der dualen Geraden genannt.

Unter der Voraussetzung $x_3 = y_3$ kann die 2. Gleichung auch in der Form

---

[1]) Die Bezeichnungen Kernpunkt, Bildpunkt, Kerngerade und Bildgerade sind von P. Predella eingeführt (Saggio di Geometria, Nota I).

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + \left[u_3 + v_1 \frac{x_1}{x_3} + v_2 \frac{x_2}{x_3} + v_3 \right] y_3 = 0$$

geschrieben werden. Für jeden bestimmt gewählten Punkt (x_1, x_2, x_3) der Kerngeraden stellt also die 2. Gleichung ebenfalls eine Gerade in den homogenen Koordinaten y_1, y_2, y_3 dar. Diese ist parallel zur Kerngeraden und enthält die zum Kernpunkt (x_1, x_2, x_3) gehörigen Bildpunkte.

Zu den ∞^1 Kernpunkten der dualen Geraden ergeben sich ∞^1 derartige Parallelen.

Eine einfache geometrische Darstellung des Punktsystems der dualen Geraden erhält man, wenn man noch eine Gerade einführt, die von den Parametern x_1, x_2, x_3 unabhängig ist und mit der Kerngeraden zusammen die duale Gerade bestimmt.

Es sei P_0 ein beliebiger Punkt der Kerngeraden g_0, g_1 die zu g_0 parallele Gerade der zugehörigen Bildpunkte P_1. Legt man durch P_0 eine zu g_0 senkrechte Gerade und bringt sie mit g_1 zum Schnitt in Q, so durchwandert Q eine Gerade, wenn man P_0 die Kerngerade g_0 durchlaufen läßt. Analytisch ergibt sich diese Gerade durch Elimination der Parameter x_1, x_2, x_3 aus den drei homogenen Gleichungen:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + \left(v_3 + u_3 + u_1 \frac{y_1}{y_3} + u_2 \frac{y_2}{y_3} \right) x_3 = 0$$

$$u_2 x_1 - u_1 x_2 + \left(u_1 \frac{y_2}{y_3} - u_2 \frac{y_1}{y_3} \right) x_3 = 0 .$$

Das Resultat dieser Elimination ist die Gleichung

$$y_1 [u_2^2 (u_1 + v_1) + u_1 (u_1^2 - u_2 v_2)] + y_2 [u_1^2 (u_2 + v_2) + u_2 (u_2^2 - u_1 v_1)]$$
$$+ y_3 [(u_1^2 + u_2^2)(u_3 + v_3) - u_3 (u_1 v_1 + u_2 v_2)] = 0 . \qquad (3)$$

Die durch diese in y_1, y_2, y_3 homogene Gleichung definierte Gerade möge die Bildgerade der dualen Geraden

$$U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0$$

heißen. Damit ist jeder dualen Geraden eineindeutig ein Geradenpaar der Ebene zugeordnet.

3. Läßt man die Voraussetzung des vorigen Abschnitts,

daß die skalaren Bestandteile der Koordinaten eines Punktes von 0 verschieden sein sollen, teilweise fallen, so hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Es werde nur noch $x_3 \neq 0$ und $u_3 \neq 0$ vorausgesetzt. Dadurch ändert sich an der Definition des dualen Punktes nichts. Ist $x_1 = x_2 = 0$, so ist der Punkt $(0, 0, x_3)$ Kernpunkt, Bildpunkt kann ein beliebiger Punkt (y_1, y_2, y_3) der Ebene sein. Gilt aber für den Träger (U_1, U_2, U_3) einer dualen Geraden $u_1 = u_2 = 0$, so ist $u_3 x_3 = 0$, d. h. die unendlich ferne Gerade der Ebene, ihre Kerngerade. Außerdem fallen alle Geraden der zugehörigen Bildpunkte ins Unendliche. Diese Unbestimmtheit drückt sich auch dadurch aus, daß in der Gleichung der Bildgeraden sämtliche Koëffizienten verschwinden. So oft ein derartiger Fall eintritt, definieren wir die duale Gerade geometrisch durch ihren Träger, der eindeutig bestimmt ist. Sein Kernpunkt ist Nullpunkt des Koordinatensystems, Bildpunkt kann jeder Punkt im endlichen Bereich der Ebene sein.

Alle ∞^2 dualen Geraden, für die $u_1 = u_2 = 0$ ist, v_1 und v_2 aber nicht beide verschwinden, wollen wir transfinite Gerade nennen. Gilt auch noch $v_1 = v_2 = 0$, d. h. fällt auch der Bildpunkt des Trägers in den Ursprung, so möge die Gerade die unendlich ferne duale Gerade heißen. Es gibt also nur eine unendlich ferne duale Gerade.

b) Läßt man für x_3 den Wert 0 zu, aber nicht gleichzeitig für alle drei Größen x_1, x_2, x_3, so können die Koordinaten der beiden Punkte, die den dualen Punkt (X_1, X_2, X_3) geometrisch darstellen, nicht mehr bestimmt werden, da keine Größe $\overline{X}_3$ existiert, so daß $X_3 : \overline{X}_3 = 1 + \varepsilon$ wird.

Läßt man aber in der Gleichung $U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0$ $u_3 = 0$ werden, so ist das entsprechende Geradenpaar, solange u_1 und u_2 nicht ebenfalls beide verschwinden, noch eindeutig bestimmt und im endlichen Bereich der Ebene gelegen.

Daraus folgt: Ist für einen dualen Punkt (U_1, U_2, U_3) der skalare Bestandteil $u_3 = 0$, so wird dieser Punkt geometrisch durch sein Netz $U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0$ dargestellt.

Die Kerngerade $u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$ dieses Netzes geht durch den Ursprung des Koordinatensystems; Bildgerade kann jede

beliebige Gerade im endlichen Gebiet der Ebene sein. Geht die Bildgerade des Netzes nicht durch den Ursprung, so wird der duale Punkt als transfiniter Punkt bezeichnet; geht die Bildgerade durch den Ursprung, so soll der Punkt unendlich ferner dualer Punkt genannt werden.

Es gibt somit in der Ebene ∞^3 transfinite und ∞^2 unendlich ferne duale Punkte.

4. Bisher wurde vorausgesetzt, daß die drei Größen x_1, x_2, x_3 bezw. u_1, u_2, u_3 nicht alle gleichzeitig verschwinden. Trifft diese Voraussetzung nicht mehr zu, so treten Unbestimmtheiten auf, die je nach der Art des Verschwindens verschiedene Werte für die Verhältnisse ergeben.

Für eine eingehende Diskussion dieses besonderen Falls fehlt hier der Raum, sie ist übrigens ganz analog der Erörterung E. Studys über uneigentliche Strahlen[1]).

Wir geben hier nur eine kurze Zusammenfassung der verschiedenen Möglichkeiten.

Sind die sechs Größen u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3 der Koordinaten U_1, U_2, U_3 eines dualen Punktes als Funktionen eines Parameters t gegeben, und verschwinden für $t = t_0$ die drei skalaren Bestandteile, aber nicht auch alle drei Größen v_1, v_2, v_3, so kann man die drei homogenen Koordinaten U_1, U_2, U_3 mit einem solchen dualen Faktor multiplizieren, daß in den drei so erhaltenen Größen U_1', U_2', U_3' für $t = t_0$ nicht mehr alle drei skalaren Bestandteile verschwinden. Die Kerngerade des Netzes ist dann eindeutig bestimmt und hat die Gleichung

$$u_1' x_1 + u_2' x_2 + u_3' x_3 = 0.$$

Die Bildgerade hat die Gleichung

$$\begin{aligned} &y_1[u_2'^2 u_1' + u_1'^3 + u_2'(u_2' v_1' - u_1' v_2')] \\ &\quad + y_2[u_1'^2 u_2' + u_2'^3 - u_1'(u_2' v_1' - u_1' v_2')] \\ &\quad + y_3[u_3'(u_1'^2 + u_2'^2) + v_3'(u_1'^2 + u_2'^2) - u_3'(u_1' v_1' + u_2' v_2')] = 0. \end{aligned}$$

Darin sind noch die Grenzwerte

---

[1]) Geometrie der Dynamen § 27. Die Analogie dieser Untersuchungen ergibt sich aus Abschnitt 30 ff.

$$\lim_{t=t_0}(u_2'v_1' - u_1'v_2') = A \quad \text{und}$$

$$\lim_{t=t_0}[v_3'(u_1'^2 + u_2'^2) - u_3'(u_1'v_1' + u_2'v_2')] = B$$

zu bestimmen. Es sind folgende Fälle möglich:

1. A und B endlich; das Netz ist eine bestimmte, im Endlichen gelegene duale Gerade.
2. $A = \infty$, B endlich; die Gleichung der Bildgeraden wird also $u_2'y_1 - u_1'y_2 = 0$.
3. $A = \infty$, $B = \infty$, aber $\lim_{t=t_0}\frac{B}{A} = C$ bestimmt und endlich; dann lautet die Gleichung der Bildgeraden
$$u_2'y_1 - u_1'y_2 + Cy_3 = 0.$$
4. $A = \infty$, $B = \infty$ und $\lim_{t=t_0}\frac{B}{A} = \infty$, so ist $y_3 = 0$ die Bildgerade.

In den Fällen 2—4 stehen also Kerngerade und Bildgerade des Netzes des dualen Punktes senkrecht aufeinander.

Die dualen Punkte, die durch solche Netze definiert sind, werden ausgeartete duale Punkte genannt. Liegt ihr Kernpunkt im Endlichen, so fällt der Bildpunkt ins Unendliche.

Die entsprechenden Netze sollen ausgeartete duale Gerade heißen[1]).

5. Es sind nun die Beziehungen zwischen den dualen Punkten und ihren Netzen, den dualen Geraden und ihren Trägern zu untersuchen.

Ist der Träger (U_1, U_2, U_3) der dualen Geraden

$$U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3 = 0$$

veränderlich, und zwar so, daß seine Koordinaten der linearen dualen Gleichung $A_1U_1 + A_2U_2 + A_3U_3 = 0$ genügen, so gehen die entsprechenden dualen Geraden alle durch den dualen Punkt

$$X_1 = \varrho A_1; \quad X_2 = \varrho A_2; \quad X_3 = \varrho A_3.$$

---

[1]) Predella muß bei seiner synthetischen Definition des dualen Punktes diese Elemente ausschließen; sein duales Punkt- bezw. Geradenkontinuum ist deshalb nicht abgeschlossen.

Da dieser Punkt Träger der dualen Geraden

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 = 0$$

ist, gilt der Satz:

Durchwandert ein dualer Punkt P eine duale Gerade g, so dreht sich die duale Netzgerade des Punktes um einen dualen Punkt, den Träger von g.

Bleibt aber bei dem variablen dualen Punkt (U_1, U_2, U_3) der Kernpunkt konstant, und durchläuft der Bildpunkt die Gerade $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$, so erhält man als zugehörige Netze ∞^1 duale Gerade mit gemeinsamer Kerngeraden

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0;$$

ihre Bildgeraden sind durch die in Abschnitt 2 entwickelte Gleichung (3) bestimmt, wobei v_1, v_2, v_3 veränderliche Parameter sind, die der Gleichung $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$ genügen[1]).

Eliminiert man eine der beiden Größen v_1 und v_2, etwa v_1, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}&\{y_1[a_1 u_1 (u_1^2 + u_2^2) - a_2 u_2^2 v_3] + y_2[a_1 u_2 (u_1^2 + u_2^2) + a_3 u_1 u_2 v_3]\\ &+ y_3[a_1 (u_1^2 + u_2^2)(u_3 + v_3) + a_3 u_1 u_3 v_3]\} - v_2\{y_1 u_2 (a_1 u_1 + a_2 u_2)\\ &- y_2 u_1 (a_1 u_1 + a_2 u_2) - y_3 u_3 (a_2 u_1 - a_1 u_2)\} = 0\end{aligned}$$

oder

$$g_1 - v_2 g_2 = 0.$$

Da $v_3 = u_3$ zu setzen ist, stellt $g_1 - v_2 g_2 = 0$ ein Strahlbüschel durch den Schnittpunkt von $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ dar. Ist also $v_2 = 0$, so ist $g_1 = 0$; ist aber $v_2 = \infty$, so ist $g_2 = 0$ die Bildgerade des zugehörigen Netzes.

Im letzteren Fall läßt sich die Gleichung $g_2 = 0$ mit

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2)$$

dividieren, und man erhält

$$u_2 y_1 - u_1 y_2 + u_3 \cdot \frac{a_1 u_2 - a_2 u_1}{a_1 u_1 + a_2 u_2} y_3 = 0,$$

die Bildgerade steht also auf der Kerngeraden senkrecht.

---

[1]) Da v_1, v_2, v_3 als homogene Koordinaten der Bildpunkte betrachtet werden, ist $u_3 = v_3$ vorauszusetzen (Abschnitt 2).

Ist $a_1 u_2 - a_2 u_1 = 0$, so hat man den Fall 2, Abschnitt 4; im allgemeinen wird für $v_2 = \infty$, d. h. für den unendlich fernen Bildpunkt der Geraden $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$ der Fall 3, Abschnitt 4 eintreten.

Ist $u_1 = u_2 = 0$, also der gegebene Kernpunkt der Ursprung, so sind zur Bestimmung der Bildgeraden die Grenzwerte

$$[u_2(a_1 u_1 + a_2 u_2)] : [u_1(a_1 u_1 + a_2 u_2)] : [u_3(a_1 u_2 - a_2 u_1)]$$

zu berechnen. Um dies zu umgehen, definiert man die dualen Geraden wieder durch ihre Träger.

Ist $a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0$, so wird die Bildgerade des Netzes, wenn der Bildpunkt des Trägers ins Unendliche rückt, die unendlich ferne Gerade (Fall 4, Abschnitt 4).

6. Nach den Entwicklungen des vorigen Abschnitts lassen sich jetzt auch duale Linienkoordinaten in der Ebene einführen.

Sind X_1, X_2, X_3 die Koordinaten eines bestimmten dualen Punktes, U_1, U_2, U_3 variable Größen, die der Gleichung

$$U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0$$

genügen, so gehen alle ∞^2 dualen Geraden

$$U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0,$$

in denen X_1, X_2, X_3 als variabel aufgefaßt werden, durch den gegebenen Punkt. Man nennt $U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0$ die Gleichung des Punktes in dualen Linienkoordinaten.

Die Größen U_1, U_2, U_3, die früher (Abschnitt 3) als Punktkoordinaten des Netzes von (X_1, X_2, X_3) aufgefaßt wurden, lassen hier eine ganz analoge Deutung wie in der gewöhnlichen Geometrie zu.

Die fundamentalen Operationen, Verbinden zweier dualer Punkte, Schneiden zweier dualer Geraden.

a) Analytische Ableitung.

7. Soll die duale Gerade $U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0$ die Verbindungslinie der beiden im Endlichen gelegenen Punkte (X_1', X_2', X_3') und (X_1'', X_2'', X_3''), deren Kernpunkte nicht zu-

sammenfallen, darstellen, so müssen gleichzeitig die drei Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 &= 0 \\ U_1 X_1' + U_2 X_2' + U_3 X_3' &= 0 \\ U_1 X_1'' + U_2 X_2'' + U_3 X_3'' &= 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich als Gleichung der gesuchten dualen Geraden

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1' & X_2' & X_3' \\ X_1'' & X_2'' & X_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

Der Träger dieser dualen Geraden hat die Koordinaten

$$X_1 : X_2 : X_3 = \begin{vmatrix} X_2' & X_3' \\ X_2'' & X_3'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X_3' & X_1' \\ X_3'' & X_1'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X_1' & X_2' \\ X_1'' & X_2'' \end{vmatrix}.$$

Der Schnittpunkt zweier im Endlichen gelegener dualer Geraden

$$\begin{aligned} U_1' X_1 + U_2' X_2 + U_3' X_3 &= 0 \\ U_1'' X_1 + U_2'' X_2 + U_3'' X_3 &= 0, \end{aligned}$$

deren Kerngerade nicht zusammenfallen, hat die Koordinaten

$$X_1 : X_2 : X_3 = \left\| \begin{matrix} U_1' & U_2' & U_3' \\ U_1'' & U_2'' & U_3'' \end{matrix} \right\|.$$

Da eine duale Gerade bereits durch ihren Träger, ein dualer Punkt durch sein Netz bestimmt ist, sieht man, daß die erste Aufgabe auch so gelöst werden kann:

Die Netze der beiden gegebenen dualen Punkte haben die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_1' X_1 + X_2' X_2 + X_3' X_3 &= 0 \\ X_1'' X_1 + X_2'' X_2 + X_3'' X_3 &= 0; \end{aligned}$$

der Schnittpunkt dieser Geraden ergibt sich aus

$$X_1 : X_2 : X_3 = \left\| \begin{matrix} X_1' & X_2' & X_3' \\ X_1'' & X_2'' & X_3'' \end{matrix} \right\|;$$

dann ist das Netz dieses Punktes die gesuchte duale Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte.

Analog läßt sich die zweite Aufgabe dadurch lösen, daß man die Träger der beiden gegebenen dualen Geraden verbindet

und zu der Verbindungsgeraden den Träger bestimmt. Dies Ergebnis wird von besonderer Bedeutung, wenn eines der beiden Elemente transfinit oder unendlich fern ist, oder wenn dies für beide gilt. Dann sind die dualen Punkte durch ihre Netze, die dualen Geraden durch ihre Träger definiert, und man löst die erste Aufgabe dadurch, daß man den Schnittpunkt der Netzgeraden und zu diesem das Netz bestimmt. Fällt der Kernpunkt des gefundenen dualen Schnittpunktes in den Ursprung, so ist die gesuchte Gerade selbst transfinit oder unendlich fern und wird durch diesen Träger definiert. Entsprechendes gilt für den Schnittpunkt einer gewöhnlichen dualen Geraden mit einer transfiniten oder der unendlich fernen Geraden.

8. Haben die gegebenen Punkte, durch die eine duale Gerade gelegt werden soll, den Kernpunkt gemeinsam, so verschwindet in der dualen Gleichung

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1' & X_2' & X_3' \\ X_1'' & X_2'' & X_3'' \end{vmatrix} = 0$$

der skalare Bestandteil identisch.

Schreibt man die Gleichung der dualen Geraden in der Form

$$(u_1 + v_1\varepsilon)(x_1 + y_1\varepsilon) + (u_2 + v_2\varepsilon)(x_2 + y_2\varepsilon) + (u_3 + v_3\varepsilon)(x_3 + y_3\varepsilon) = 0,$$

wo $u_3 = v_3$, $x_3 = y_3$ zu setzen ist, so hat man zur Bestimmung der vier Verhältnisse

$$u_1 : u_2 : u_3 ; \quad v_1 : v_2 : v_3$$

in diesem Fall nur drei Gleichungen, nämlich

$$u_1 x_1' + u_2 x_2' + u_3 x_3' = 0 \tag{1}$$

$$u_1 y_1' + u_2 y_2' + u_3 y_3' + v_1 x_1' + v_2 x_2' + v_3 x_3' = 0 \tag{2}$$

$$u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_3 y_3'' + v_1 x_1' + v_2 x_2' + v_3 x_3' = 0 \tag{3}$$

Subtrahiert man (3) von (2), so ergibt sich

$$u_1(y_1' - y_1'') + u_2(y_2' - y_2'') + u_3(y_3' - y_3'') = 0 \tag{4}$$

und aus den Gleichungen (1) und (4) kann man

$$u_1 : u_2 : u_3$$

bestimmen.

Zugleich sieht man, daß die Kerngerade parallel zur Verbindungslinie der beiden Bildpunkte (y_1', y_2', y_3') und (y_1'', y_2'', y_3'') verlaufen muß.

Dagegen läßt sich von den Verhältnissen $v_1 : v_2 : v_3$ nur noch eines bestimmen. Drückt man etwa mittels Gleichung (2), in die die gefundenen Werte $u_1 : u_2 : u_3$ einzusetzen sind, $v_1 : v_3$ in $v_2 : v_3$ aus und setzt diesen Wert in die Gleichung der Bildgeraden ein, so ergibt sich durch eine ganz entsprechende Umformung wie in Abschnitt 5, daß bei veränderlichem $v_2 : v_3$ die Bildgerade ein Geradenbüschel durchläuft.

Zwei duale Punkte mit gemeinsamem Kernpunkt bestimmen also ∞^1 duale Gerade mit gemeinsamer Kerngeraden und Bildgeraden, die ein Strahlbüschel bilden.

Die dualistische Aufgabe, zwei duale Gerade mit gemeinsamer Kerngeraden zu schneiden, kann durch Übergang zu den beiden zugehörigen Trägern auf die vorige Aufgabe zurückgeführt, sie kann aber auch in analoger Weise selbständig gelöst werden. Es ergibt sich: Zwei duale Gerade mit gemeinsamer Kerngeraden schneiden sich in ∞^1 dualen Punkten mit gemeinsamem Kernpunkt, deren Bildpunkte eine Gerade erfüllen.

Die Fälle transfiniter oder unendlich ferner Elemente erledigen sich wieder durch Übergang zu den entsprechenden Netzen bezw. Trägern.

9. Es bleibt noch der Fall zu untersuchen, daß eines der beiden Elemente ausgeartet ist oder beide.

Es sei (X_1', X_2', X_3') ein ausgearteter Punkt, (X_1'', X_2'', X_3'') dagegen nicht. Zu beiden Punkten gehören eindeutig bestimmte Netze.

Der Schnittpunkt der Kerngeraden beider Netze ergibt sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1' x_1 + x_2' x_2 + x_3' x_3 &= 0 \\ x_1'' x_1 + x_2'' x_2 + x_3'' x_3 &= 0; \end{aligned}$$

er ist also eindeutig bestimmt.

Zu diesem Punkt als Kernpunkt gehören nun im ersten Netz alle Punkte der unendlich fernen Geraden $y_3 = 0$ als Bildpunkte, im zweiten Netz dagegen alle Punkte einer bestimmten,

im Endlichen gelegenen Parallelen zur Kerngeraden. Diese Gerade schneidet die unendlich ferne Gerade in einem bestimmt definierten Punkt, der mit dem Schnittpunkt der beiden Kerngeraden als Kernpunkt zusammen den gemeinsamen dualen Punkt beider Netze darstellt. Zu diesem gehört aber nach Abschnitt 5 eine bestimmte ausgeartete Gerade, sein Netz.

Ein gewöhnlicher und ein ausgearteter dualer Punkt, deren Kernpunkte nicht zusammenfallen, bestimmen also eine ausgeartete Gerade.

Damit ist auch die dualistische Aufgabe, zwei duale Gerade, von denen eine ausgeartet ist, zu schneiden, erledigt. Sind dagegen beide Punkte ausgeartet, so kann deren Verbindungsgerade nicht mehr eindeutig bestimmt werden.

Durch Übergang zu den beiden Netzen ergibt sich, daß deren Kerngerade sich wieder in einem bestimmten Punkt schneiden müssen, falls die Kernpunkte der beiden gegebenen dualen Punkte nicht zusammenfallen. Zu diesem Punkt als Kernpunkt gehören aber in beiden Netzen sämtliche Punkte der unendlich fernen Geraden als Bildpunkte. Die beiden Netze haben daher ∞^1 ausgeartete Punkte gemeinsam.

Durch Übergang zu den entsprechenden Netzen findet man: Zwei ausgeartete Punkte, deren Kernpunkte nicht zusammenfallen, bestimmen ∞^1 ausgeartete duale Gerade mit der Verbindungslinie der beiden Kernpunkte als gemeinsamer Kerngeraden. Ihre Bildgeraden sind die ∞^1 Normalen der Kerngeraden.

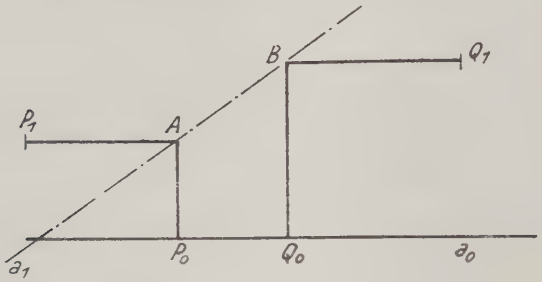
Dieser Fall bildet also das Gegenstück zu dem in Abschnitt 8 Behandelten.

Haben die beiden ausgearteten Punkte auch noch den Kernpunkt gemeinsam, so ergeben sich alle ∞^2 durch einen der Punkte gehenden ausgearteten dualen Geraden.

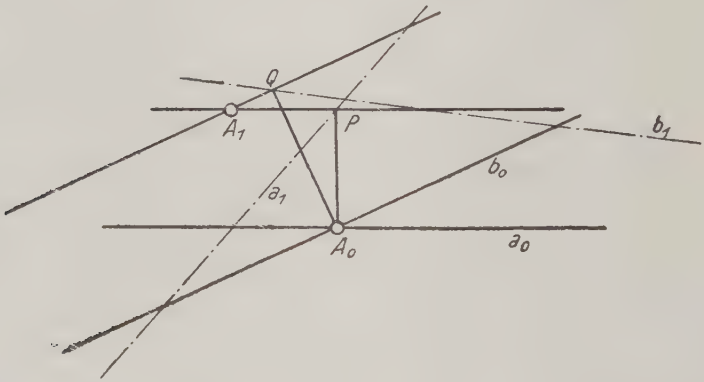
b) Geometrische Konstruktionen.

10. Duale Gerade durch zwei duale Punkte mit verschiedenen Kernpunkten: Gegeben $P_0 P_1$ und $Q_0 Q_1$. Die Verbindungslinie der Kernpunkte P_0 und Q_0 ist die gesuchte Kerngerade a_0. Zieht man durch P_1 und Q_1 Parallelen zu a_0 und

durch P_0 und Q_0 Normalen zu a_0, so ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte A und B die Bildgerade a_1.



Schnitt zweier dualer Geraden mit verschiedenen Kerngeraden: Der Schnittpunkt A_0 der beiden Kerngeraden a_0 und b_0 ist der gesuchte Kernpunkt. Errichtet man in A_0 auf a_0 und b_0

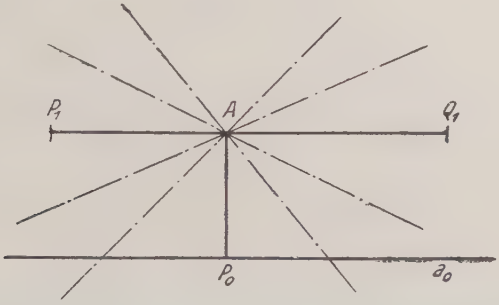


Lote, die die zugehörigen Bildgeraden a_1 und b_1 in P und Q schneiden, zieht durch P die Parallele zu a_0, durch Q die Parallele zu b_0, so ist der Schnittpunkt A_1 beider Parallelen der gesuchte Bildpunkt.

Will man von dualen Punkten zu ihren Netzen, von dualen Geraden zu ihren Trägern übergehen, wie dies bei transfiniten oder unendlich fernen Elementen notwendig ist, so muß der Nullpunkt des Koordinatensystems und um ihn ein Einheitskreis gewählt werden. Die weitere Konstruktion folgt dann leicht

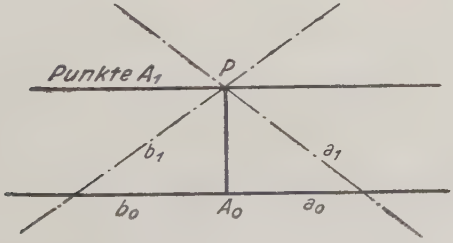
aus den entsprechenden Gleichungen. Das Ergebnis ist von der besonderen Wahl des Einheitskreises unabhängig [1]).

11. Die Kernpunkte der beiden gegebenen dualen Punkte fallen zusammen: Die Parallele durch den gemeinsamen Kernpunkt P_0 zur Verbindungslinie der Bildpunkte P_1 und Q_1 ist die gesuchte Kerngerade a_0.



Errichtet man in P_0 das Lot auf a_0, das $P_1 Q_1$ in A schneidet, so sind die Geraden durch A die ∞^1 zugehörigen Bildgeraden.

Schnitt zweier dualer Geraden mit gemeinsamer Kerngeraden: Schneiden sich die beiden Bildgeraden in P und fällt man von P das Lot auf a_0, so ist der Fußpunkt A_0 dieses Lotes der



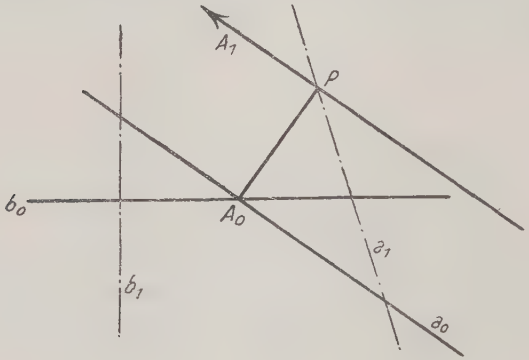
gemeinsame Kernpunkt. Die beiden Geraden haben dann alle ∞^1 dualen Punkte mit A_0 als Kernpunkt und den Punkten der Parallelen durch P zu a_0 als Bildpunkten gemeinsam.

---

[1]) s. ferner Abschnitt 30.

12. Schnitt einer gewöhnlichen dualen Geraden $(a_0\, a_1)$ mit einer ausgearteten Geraden $(b_0\, b_1)$:

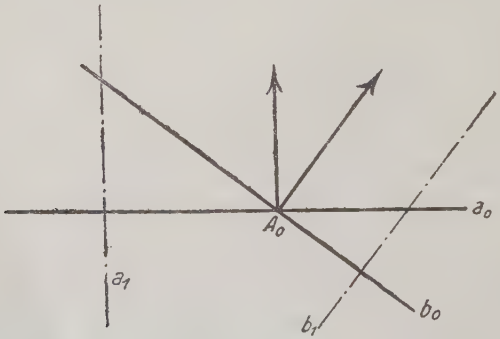
Der Schnittpunkt A_0 von a_0 und b_0 ist der gesuchte Kernpunkt. Errichtet man auf a_0 in A_0 das Lot, das a_1 in P



schneidet, und zieht durch P zu a_0 die Parallele, so ist der unendlich ferne Punkt A_1 dieser Parallelen der gesuchte Bildpunkt.

Die Aufgabe, einen gewöhnlichen und einen ausgearteten dualen Punkt zu verbinden, muß auf diese zurückgeführt werden.

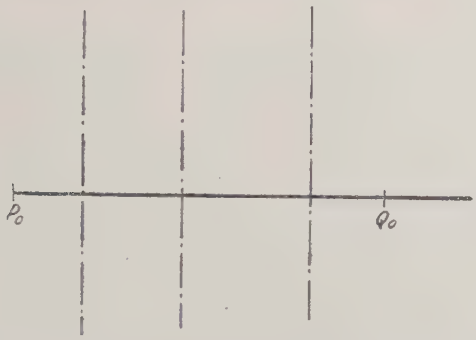
Schnitt zweier ausgearteter Geraden $(a_0\, a_1)$ und $(b_0\, b_1)$: Der Schnittpunkt A_0 der Kerngeraden a_0 und b_0 ist der gesuchte



Kernpunkt. Zugehörige Bildpunkte sind bei beiden Geraden sämtliche Punkte der unendlich fernen Geraden. Daher haben

die beiden ausgearteten Geraden sämtliche ausgearteten Punkte mit dem Kernpunkt A_0 gemeinsam.

Die Aufgabe, zwei ausgeartete Punkte zu verbinden, kann entweder auf die vorige zurückgeführt, oder aber auf folgende



Art gelöst werden: Die Verbindungsgerade der beiden Kernpunkte P_0 und Q_0 ist die gesuchte Kerngerade. Die ∞^1 Normalen dieser Geraden sind die zugehörigen Bildgeraden.

13. Die bisherigen Untersuchungen, die sich auf die Ebene beschränkten, lassen sich nun auch auf den Raum übertragen.

Man definiert den dualen Raumpunkt durch vier duale Größen X_1, X_2, X_3, X_4 und stellt ihn geometrisch durch zwei gewöhnliche Punkte, seinen Kernpunkt P_0 (x_1, x_2, x_3, x_4) und seinen Bildpunkt P_1 (y_1, y_2, y_3, y_4) dar. Die homogenen Koordinaten dieser Punkte ergeben sich durch Division der dualen Koordinaten mit $k\overline{X}_4$, so daß $x_4 = y_4$ wird.

Die duale Ebene ist die Gesamtheit der ∞^4 dualen Raumpunkte, deren Koordinaten einer homogenen, linearen dualen Gleichung $U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 + U_4 X_4 = 0$ genügen.

Dividiert man die Gleichung mit $k\overline{X}_4$, so stellt der skalare Bestandteil $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ eine Ebene, die Kernebene der dualen Ebene, dar. Wird in dieser Ebene ein bestimmter Punkt gewählt, so ergeben sich die zugehörigen Bildpunkte aus dem vektoriellen Bestandteil der Gleichung; sie erfüllen eine zur Kernebene parallele Ebene.

Errichtet man auf der Kernebene ein Lot und bringt es

mit der Ebene der zum Fußpunkt des Lotes gehörigen Bildpunkte zum Schnitt, so beschreibt dieser Schnittpunkt eine Ebene, wenn man den Kernpunkt die ganze Kernebene durchwandern läßt. Diese Ebene wird die Bildebene der dualen Ebene genannt. Jede duale Ebene wird also durch zwei gewöhnliche Ebenen dargestellt.

Zu jedem dualen Raumpunkt (U_1, U_2, U_3, U_4) gehört eine bestimmte duale Ebene $U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 + U_4 X_4 = 0$, sie wird das Netz des Punktes genannt; zu jeder Ebene umgekehrt ein bestimmter dualer Punkt, der Träger der Ebene.

Insbesondere werden alle dualen Ebenen, deren Kernebene die unendlich ferne Ebene ist, durch ihren Träger, alle dualen Punkte mit unendlich fernem Kernpunkt durch ihr Netz dargestellt. Man erhält so ∞^3 transfinite und eine unendlich ferne duale Ebene, ∞^5 transfinite und ∞^4 unendlich ferne duale Punkte.

Stehen Kern- und Bildebene senkrecht aufeinander, so nennt man die duale Ebene ausgeartet, ebenso ihren Träger, dessen Bildpunkt im Unendlichen liegt.

14. Wir hätten nun analog den Abschnitten 7—9 die Bestimmung der dualen Ebene durch drei duale Raumpunkte sowie die gemeinsamen Elemente dreier dualer Ebenen zu untersuchen.

Um Weitschweifigkeiten zu vermeiden, sollen hier nur die Ergebnisse angeführt werden.

a) Drei duale Punkte mit verschiedenen Kernpunkten, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen eine duale Ebene. Im Falle transfiniter oder unendlich ferner Punkte erhält man diese Ebene dadurch, daß man die drei zugehörigen Netze zum Schnitt bringt und zu diesem dualen Punkt das Netz bestimmt.

b) Liegen die drei Kernpunkte A_0, B_0, C_0 auf einer Geraden, so ergeben sich folgende Fälle:

1. Die drei Bildpunkte A_1, B_1, C_1 liegen nicht auf einer Geraden. Dann ist die gesuchte Kernebene eindeutig bestimmt, dagegen kann die Bildebene noch ein Ebenenbüschel durchlaufen.

2. Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn die drei Bildpunkte zwar ebenfalls auf einer Geraden liegen, diese aber nicht parallel zur Geraden der Kernpunkte verläuft.

3. Teilt C_1 die Strecke $A_1 B_1$ im selben Verhältnis wie C_0 die Strecke $A_0 B_0$, oder sind die beiden Geraden, auf denen die Kernpunkte bezw. die Bildpunkte liegen, parallel, so gehen durch die drei gegebenen dualen Punkte ∞^2 duale Ebenen.

c) Fallen von den drei Kernpunkten zwei zusammen, so zeigen sich folgende Fälle:

1. Fallen B_0 und C_0 zusammen, die Bildpunkte B_1 und C_1 aber nicht und ist $B_1 C_1$ nicht parallel zu $A_0 B_0$, so ist die Kernebene eindeutig bestimmt, die Bildebenen bilden ein Ebenenbüschel.

2. Ist $B_1 C_1$ parallel zu $A_0 B_0$ oder fallen auch die Punkte B_1 und C_1 zusammen, so ergeben sich ∞^2 duale Ebenen.

d) Fallen alle drei Kernpunkte zusammen, so folgt:

1. Bilden die Bildpunkte ein eigentliches Dreieck, so erhält man ∞^2 duale Ebenen mit gemeinsamer Kernebene.

2. Liegen die drei Bildpunkte auf einer Geraden, so ergeben sich ∞^3 duale Ebenen durch die drei gegebenen dualen Punkte.

e) Sind zwar die Kernpunkte verschieden, aber treten unter den dualen Punkten ausgeartete auf, so hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Ist nur einer der drei Punkte ausgeartet, so ist die gesuchte Ebene ebenfalls ausgeartet, aber eindeutig bestimmt.

2. Befinden sich unter den drei gegebenen Punkten zwei ausgeartete, so ergeben sich ∞^1 ausgeartete Ebenen.

3. Sind alle drei Punkte ausgeartet, so bestimmen sie ∞^2 ausgeartete Ebenen.

Noch weitere Möglichkeiten ergeben sich, wenn auch noch einzelne der drei Kernpunkte zusammenfallen.

15. Wir definieren die duale Gerade des Raumes als Schnitt zweier dualer Ebenen mit verschiedenen Kernebenen; im allgemeinen haben diese ∞^2 duale Punkte gemeinsam.

Der einfache Nachweis, daß eine solche duale Gerade wieder durch zwei gewöhnliche Gerade dargestellt werden kann, und daß zwei (nicht ausgeartete) duale Punkte mit verschiedenen Kernpunkten eine duale Gerade bestimmen, soll hier übergangen werden.

Zwei duale Punkte mit zusammenfallenden Kernpunkten bestimmen ∞^2 duale Gerade; durch einen dualen Punkt kann man im Raum ∞^4 duale Gerade legen.

Setzt man nun für die Geometrie der gewöhnlichen Punkte und Geraden die Gültigkeit der Axiome der Verknüpfung voraus, so sieht man, daß diese auch in der dualen Geometrie, abgesehen von bestimmten Ausnahmefällen, ihre Gültigkeit behalten[1]).

16. Bezüglich der Anordnung der Punkte einer dualen Geraden werde folgendes festgesetzt:

Sind drei Punkte A, B, C einer dualen Geraden gegeben, und dividiert man ihre Koordinaten (X_1', X_2', X_3'); (X_1'', X_2'', X_3''); (X_1''', X_2''', X_3''') bezw. mit $\overline{X}_3'$, $\overline{X}_3''$, $\overline{X}_3'''$, so sagen wir, B liege zwischen A und C, falls eine der beiden Ungleichungen

$$x_1' < x_1'' < x_1''' \quad \text{oder} \quad x_1' > x_1'' > x_1'''$$

oder auch eine der beiden Ungleichungen

$$x_2' < x_2'' < x_2''' \quad \text{und} \quad x_2' > x_2'' > x_2'''$$

erfüllt ist, d. h. wenn B_0 zwischen A_0 und C_0 liegt.

Fällt aber B_0 mit einem der beiden Kernpunkte A_0 und C_0 zusammen, und ist $x_1' < x_1'''$, so sagen wir, B liege zwischen A und C, wenn im Fall $x_1' = x_1''$ die Ungleichung $y_1' < y_1''$, im Fall $x_1'' = x_1'''$ die Ungleichung $y_1'' < y_1'''$ besteht.

Die Anordnung der Punkte einer dualen Geraden läßt sich etwas einfacher darstellen, wenn man zunächst über duale Zahlen die Bestimmung trifft:

Sind zwei duale Zahlen $a + b\varepsilon$ und $c + d\varepsilon$ gegeben, so gilt $a + b\varepsilon < c + d\varepsilon$, falls $a < c$ ist. Ist aber $a = c$, so gilt $a + b\varepsilon < c + d\varepsilon$, falls $b < d$ ist[2]).

Dividiert man dann die Koordinaten der drei Punkte wie oben mit $\overline{X}'_3$, $\overline{X}''_3$, $\overline{X}'''_3$ und bezeichnet die so erhaltenen Werte

---

[1]) Die Axiome werden hier immer in der von D. Hilbert in den „Grundlagen der Geometrie“ eingeführten Bezeichnungsweise angegeben.

[2]) Größen, die dieser Forderung genügen, nennt man „nichtarchimedisch“; S. Hahn, Nichtarchimedische Größensysteme (Sitzungsberichte der Akademie Wien, mathem.-naturwiss. Klasse 1907).

wieder mit X_1', X_2', X_3' ($X_3' = 1 + \varepsilon$) usw., so kann man sagen: B liegt zwischen A und C, falls eine der beiden Ungleichungen

$$X_1' \leqq X_1'' \leqq X_1'''$$

oder auch eine der Ungleichungen

$$X_2' \leqq X_2'' \leqq X_2'''$$

erfüllt ist.

Über die Anordnung der ∞^2 dualen Geraden durch einen dualen Punkt sind bereits die notwendigen Festsetzungen getroffen, wenn man verlangt, daß sie dieselbe sein soll, wie die der zugehörigen Träger.

Setzt man für die gewöhnlichen Punkte die Gültigkeit der Hilbertschen Axiome II, der Anordnung, voraus, so behalten sie bei vorstehender Anordnung der dualen Punkte ihre Gültigkeit auch für diese.

17. Aus dem Vorstehenden leiten wir die für eine metrische Geometrie der dualen Gebilde notwendigen Definitionen und Formeln ab.

Sie werden besonders einfach, wenn man die homogenen Koordinaten X_1, X_2, X_3 des dualen Punktes mit $\overline{X}_3$ dividiert, also $x_3 = y_3 = 1$ setzt.

Dann ist der Abstand zweier Punkte A und B mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} X_1' &= x_1' + y_1'\varepsilon & \qquad X_1'' &= x_1'' + y_1''\varepsilon \\ X_2' &= x_2' + y_2'\varepsilon & \qquad X_2'' &= x_2'' + y_2''\varepsilon \\ X_3' &= 1 \quad + \varepsilon & \qquad X_3'' &= 1 \quad + \varepsilon \end{aligned}$$

durch die Gleichung bestimmt:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(X_1'' - X_1')^2 + (X_2'' - X_2')^2} \\ &= \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2} \\ &\qquad + \frac{(x_1'' - x_1')(y_1'' - y_1') + (x_2'' - x_2')(y_2'' - y_2')}{\sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2}}\,\varepsilon \\ &= d_0 + d_1\varepsilon. \end{aligned}$$

d_0 ist also der Abstand der beiden Kernpunkte, d_1 die Projektion der Strecke A_1B_1 auf die Kerngerade durch A_0 und B_0.

Aus dieser Definition des Abstandes zweier Punkte folgt,

daß man auf einer dualen Geraden von einem gegebenen Punkt A ausgehend in vorgeschriebener Richtung einen zweiten Punkt B so bestimmen kann, daß A und B einen vorgeschriebenen Abstand $d = d_0 + d_1\varepsilon$ haben.

Sind C, D, E, ... K Punkte der dualen Geraden zwischen A und B, so sagen wir, die Strecke AB setze sich aus den Teilstrecken AC, CD, ... KB zusammen; AB ist ihre Summe. Es gelten dann in dieser Geometrie die Hilbertschen Kongruenzaxiome III, 1, 2 und 3.

Den Winkel einer dualen Geraden

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 = 0$$

mit der x_1-Achse kann man durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon) = -\frac{A_1}{A_2}$$

definieren.

Schreibt man die Gleichung der dualen Geraden in der Form:

$$(a_0 + a_1\varepsilon)(x_1 + y_1\varepsilon) + (b_0 + b_1\varepsilon)(x_2 + y_2\varepsilon) + c_0 + c_1\varepsilon = 0,$$

so ist

$$\operatorname{tg}(\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon) = -\frac{a_0 + a_1\varepsilon}{b_0 + b_1\varepsilon} = -\left[\frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2}\varepsilon\right];$$

also

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon) &= \operatorname{tg}\varphi_0 - \frac{a_0^2 + b_0^2}{b_0^2}\cdot\frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{a_0^2 + b_0^2}\varepsilon \\ &= \operatorname{tg}\varphi_0 + (1 + \operatorname{tg}^2\varphi_0)\operatorname{tg}\alpha\cdot\varepsilon.\end{aligned}$$

Dabei ist φ_0 der Winkel der Kerngeraden mit der x_1-Achse, α der Winkel zwischen der Kerngeraden und der Bildgeraden.

Entwickelt man $\operatorname{tg}(\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon)$ nach den Rechengesetzen dualer Größen[1]), so ergibt sich

$$\operatorname{tg}(\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon) = \operatorname{tg}\varphi_0 + (1 + \operatorname{tg}^2\varphi_0)\varphi_1\cdot\varepsilon.$$

Soll dieser Ausdruck mit dem Vorstehenden übereinstimmen, so hat man $\varphi_1 = \operatorname{tg}\alpha$ zu setzen.

Daher ist der Winkel der dualen Geraden

---

[1]) Definitionsgleichung von Predella (Saggio di Geometria, Nota II, 74).

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 = 0$$

mit der x_1-Achse

$$\varphi_0 + \varphi_1 \varepsilon = \varphi_0 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \varepsilon .$$

Sind zwei Gerade gegeben, die mit der x_1-Achse die Winkel

$$\varphi' = \varphi_0' + \operatorname{tg} \alpha \cdot \varepsilon$$
$$\varphi'' = \varphi_0'' + \operatorname{tg} \beta \cdot \varepsilon$$

bilden, so ist der Winkel beider Geraden

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1 \varepsilon = (\varphi_0'' - \varphi_0') + (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)\, \varepsilon .$$

Für den Winkel zweier Geraden

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 = 0$$

und

$$B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3 = 0$$

gilt daher die Formel

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 B_1 + A_2 B_2} .$$

Insbesondere sollen zwei duale Gerade p a r a l l e l genannt werden, wenn $\operatorname{tg} \vartheta = 0$, also $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$ ist; s e n k r e c h t dagegen, wenn $A_1 B_1 + A_2 B_2 = 0$ ist.

Geometrisch stellen sich diese Definitionen sehr einfach dar. Aus der ersten Formel folgt: Zwei duale Gerade sind parallel, wenn sowohl ihre Kerngeraden als ihre Bildgeraden parallel sind. Führt man in die zweite Formel für $-\frac{A_1}{A_2}$ den Wert

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\varphi_0 + \varphi_1 \varepsilon),$$

für $-\frac{B_1}{B_2}$ den Wert $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} (\psi_0 + \psi_1 \varepsilon)$ ein, wobei $\varphi_1 = \operatorname{tg} \alpha$, $\psi_1 = \operatorname{tg} \beta$ zu setzen ist, so erhält man nach einfachen Umformungen

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_0} (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) = 0; \quad \text{also} \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta .$$

Da α und β die Winkel der beiden Bildgeraden mit ihren Kerngeraden sind, müssen die Bildgeraden denselben Winkel miteinander bilden wie die Kerngeraden. Aus dem skalaren Bestandteil der Gleichung $A_1 B_1 + A_2 B_2 = 0$ folgt, daß dieser Winkel 90° beträgt.

Zwei duale Gerade schneiden sich also senkrecht, wenn sowohl die Kerngeraden als auch die Bildgeraden aufeinander senkrecht stehen.

Die Aufgabe, durch einen gegebenen dualen Punkt eine duale Gerade von vorgeschriebener Richtung zu legen, ist jetzt eindeutig lösbar. Man erhält, wenn (X_1', X_2', X_3') der gegebene Punkt, $-\frac{A_1}{A_2} = m$ die gegebene Richtung ist:

$$\begin{aligned} A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 &= 0 \\ A_1 X_1' + A_2 X_2' + A_3 X_3' &= 0 \\ A_1 + m A_2 \qquad\quad &= 0, \end{aligned}$$

somit

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1' & X_2' & X_3' \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 0$$

als Gleichung der gesuchten dualen Geraden.

Analog ist die Aufgabe zu lösen, wenn die Gerade mit einer andern gegebenen dualen Geraden einen vorgeschriebenen Winkel bilden soll. Damit ist gezeigt, daß in dieser dualen Geometrie sowohl die Kongruenzaxiome III_4 und III_5 von Hilbert als auch das Parallelenaxiom ihre Gültigkeit behalten.

18. Die Entwicklungen sind nun so weit fortgeführt, daß man sich von der bisherigen Voraussetzung eines aus zwei gewöhnlichen senkrechten Geraden bestehenden Koordinatensystems freimachen kann. Als Ursprung des Koordinatensystems kann ein beliebiger dualer Punkt, als Achsen können zwei beliebige duale Gerade durch den Ursprung gewählt werden.

Sind diese Geraden senkrecht, so bezeichnet man das duale Koordinatensystem als rechtwinklig.

Sind X_1, X_2, X_3 die Koordinaten eines dualen Punktes, und dividiert man sie mit $\overline{X}_3$, so erhält man den Punkt, wenn man die beiden dualen Strecken, die den Quotienten

$$X_1 : \overline{X}_3 \quad \text{und} \quad X_2 : \overline{X}_3$$

entsprechen, wie in der gewöhnlichen Geometrie vom Ursprung

aus auf den Achsen abträgt, durch deren Endpunkte die Parallelen zu den Achsen zieht und diese zum Schnitt bringt.

Legt man durch den Ursprung O und den gegebenen dualen Punkt P eine Gerade, die mit der X_1-Achse den Winkel

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \cdot \varepsilon$$

bildet, und berücksichtigt, daß auch im dualen Zahlsystem die Formel $\cos^2\varphi = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$ gilt, so ergibt sich als Abszisse des Punktes der Wert

$$\begin{aligned} X_1 &= OP \cdot \cos\varphi \\ &= (d_0 + d_1\varepsilon)\cos(\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon), \end{aligned}$$

wenn die Strecke OP gleich $d_0 + d_1\varepsilon$ ist.

Dieses Ergebnis läßt sich verallgemeinern:

Zieht man durch die Endpunkte A und B der Strecke $(d_0 + d_1\varepsilon)$ einer dualen Geraden g_1 zwei parallele duale Gerade, die auf der dualen Geraden g_2 senkrecht stehen und sie in P und Q schneiden, so besteht zwischen den Strecken AB und PQ die Gleichung:

$$PQ = (d_0 + d_1\varepsilon)\cos(\vartheta_0 + \vartheta_1\varepsilon),$$

wenn $(\vartheta_0 + \vartheta_1\varepsilon)$ der duale Winkel der beiden dualen Geraden g_1 und g_2 ist. Man nennt PQ die orthogonale Projektion der Strecke $d_0 + d_1\varepsilon$ auf die Gerade g_2.

Damit sind die Hilfsmittel geschaffen, um Transformationen der Koordinaten eines Punktes auf andere Koordinatensysteme auszuführen.

Wird bei den Koordinaten des dualen Punktes wieder wie oben $X_3 = 1 + \varepsilon$ vorausgesetzt, so lauten die diesbezüglichen Formeln für Parallelverschiebung um die Strecken $a_1 + b_1\varepsilon$, $a_2 + b_2\varepsilon$:

$$\begin{aligned} x_1' + y_1'\varepsilon &= (x_1 + y_1\varepsilon) - (a_1 + b_1\varepsilon) = x_1 - a_1 + (y_1 - b_1)\varepsilon \\ x_2' + y_2'\varepsilon &= (x_2 + y_2\varepsilon) - (a_2 + b_2\varepsilon) = x_2 - a_2 + (y_2 - b_2)\varepsilon; \end{aligned}$$

für Drehung um den Winkel $\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon$:

$$\begin{aligned} x_1' + y_1'\varepsilon &= (x_1 + y_1\varepsilon)\cos(\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon) - (x_2 + y_2\varepsilon)\sin(\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon) \\ x_2' + y_2'\varepsilon &= (x_1 + y_1\varepsilon)\sin(\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon) + (x_2 + y_2\varepsilon)\cos(\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon). \end{aligned}$$

Aus der Gültigkeit dieser Formeln folgt nun auch die Gültigkeit des Kongruenzsatzes, Axiom III, 6; der ziemlich einfache Beweis kann hier übergangen werden.

Eine wesentliche Bedingung für die Gültigkeit des speziellen Pascalschen Satzes (Hilbert, Grundlagen der Geometrie) ist, falls das Axiom des Archimedes nicht vorausgesetzt wird, die Gültigkeit der Kongruenzaxiome. Da diese in der dualen Geometrie gelten, läßt sich auch der Pascalsche Satz nachweisen und auf Grund dieses Satzes und der Hilbert'schen Axiome I—IV die Lehre von den Proportionen und den Flächeninhalten ebener Figuren entwickeln.

19. Was das Verhalten dieser dualen Geometrie zum Axiom des Archimedes angeht, so folgt aus der in Abschnitt 16 getroffenen Anordnung der Punkte einer Geraden und der Definition des Abstandes zweier Punkte, daß das Axiom V_1 des Archimedes nicht mehr gilt.

Sind drei Punkte A, B, C einer dualen Geraden gegeben, und ist $(d_0 + d_1\varepsilon)$ der Abstand der Punkte A und B, $(d_0' + d_1'\varepsilon)$ der Abstand der Punkte A und C, so wird, falls B_0 mit A_0, C_0 aber nicht mit A_0 zusammenfällt, $d_0 = 0$, und es ist dann

$$n(d_1\varepsilon) < d_0' + d_1'\varepsilon,$$

wie groß auch n gewählt werden mag. Man kann also durch Abtragen der Strecke AB von A aus in diesem Fall den Punkt C nicht überschreiten.

Dagegen behält das Axiom V_2, der Vollständigkeit, seine Gültigkeit, da das hier zugrunde gelegte duale Zahlsystem ein vollständiges Zahlsystem vom Klassentypus (0, 1) ist[1] [2]).

[1]) Hahn, Nichtarchimedische Größensysteme.

[2]) In der von D. Hilbert aufgestellten nichtarchimedischen Geometrie (Grundlagen der Geometrie § 12) gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht.

II. Projektive Geometrie dualer Größen.

20. Die Anordnung der Punkte einer dualen Geraden und der dualen Strahlen eines Büschels werde wieder wie in der metrischen Geometrie dualer Größen getroffen.

Da die Operationen des Schneidens zweier Geraden und des Verbindens zweier Punkte, des Projizierens eines Punktes auf eine Gerade in der dualen Geometrie so definiert wurden, daß sie, von bestimmten Ausnahmefällen abgesehen, stets eindeutig ausführbar sind, kann man im Bereich der dualen Größen auch eine projektive Geometrie entwickeln.

Bezeichnet man die Punktreihen einer dualen Geraden und die dualen Geraden bezw. Ebenen eines Büschels als Grundgebilde erster Stufe, so kann man zwei derartige Grundgebilde erster Stufe dual-projektiv nennen, wenn sie durch eine endliche Anzahl solcher Operationen wie Schneiden und Verbinden ineinander übergeführt werden können.

Statt der bisher benützten homogenen Koordinaten werden in den folgenden Abschnitten meist inhomogene Koordinaten zur Anwendung kommen. Wir dividieren die homogenen Koordinaten X_1 und X_2 der Punkte einer dualen Geraden durch $\overline{X}_2$ und schreiben dann statt $X_1' : X_2' = (x + y\varepsilon) : (1 + \varepsilon)$ kurz $X = x + y\varepsilon$.

21. Sind vier duale Punkte A, B, C, D einer dualen Geraden gegeben, so läßt sich in analoger Weise wie in der gewöhnlichen Geometrie der Begriff des Doppelverhältnisses einführen.

Sind $X^{(1)} = x^{(1)} + y^{(1)}\varepsilon$; $X^{(2)} = x^{(2)} + y^{(2)}\varepsilon$; $X^{(3)} = x^{(3)} + y^{(3)}\varepsilon$; $X^{(4)} = x^{(4)} + y^{(4)}\varepsilon$ die Koordinaten der vier Punkte, so soll

$$(ABCD) = \frac{X^{(1)} - X^{(2)}}{X^{(1)} - X^{(4)}} : \frac{X^{(3)} - X^{(2)}}{X^{(3)} - X^{(4)}}$$

ihr duales Doppelverhältnis genannt werden.

Die weitere Berechnung dieses Ausdrucks liefert die duale Zahl

$$D = \frac{[x^{(1)} - x^{(2)}][x^{(3)} - x^{(4)}]}{[x^{(1)} - x^{(4)}][x^{(3)} - x^{(2)}]} \cdot \left\{1 + \left(\left[\frac{y^{(1)} - y^{(2)}}{x^{(1)} - x^{(2)}} - \frac{y^{(1)} - y^{(4)}}{x^{(1)} - x^{(4)}}\right] - \left[\frac{y^{(3)} - y^{(2)}}{x^{(3)} - x^{(2)}} - \frac{y^{(3)} - y^{(4)}}{x^{(3)} - x^{(4)}}\right]\right)\varepsilon\right\}$$

$$= d_0(1 + d_1\varepsilon).$$

Der skalare Bestandteil d_0 dieser Zahl stellt das gewöhnliche Doppelverhältnis der vier Kernpunkte dar. Der Ausdruck d_1 ist analog d_0 gebaut, nur treten an Stelle der Größen $[x^{(1)} - x^{(2)}]$ usw. die Quotienten $\frac{y^{(1)} - y^{(2)}}{x^{(1)} - x^{(2)}}$ usw., an Stelle der Divisionszeichen Subtraktionszeichen auf. Man nennt d_1 die Doppeldifferenz der vier dualen Punkte[1]).

Entsprechend den 24 Permutationen der vier Größen A, B, C, D gibt es auch 24 Doppelverhältnisse, von denen aber je vier einander gleich sind, so daß noch sechs verschiedene Werte desselben möglich sind. Diese lassen sich alle durch D ausdrücken; es ergeben sich die Werte:

$$D,\ \frac{D}{D-1},\ 1-D,\ \frac{1}{D},\ \frac{D-1}{D},\ \frac{1}{1-D}.$$

Von diesen sechs Doppelverhältnissen können je nach der Lage der Kernpunkte einzelne unbestimmt werden, aber nicht alle gleichzeitig; dieser Fall tritt auf, wenn einzelne der vier Kernpunkte zusammenfallen.

Ist $B_0 = C_0$, aber $A_0 \neq C_0 \neq D_0$, so werden die beiden Doppelverhältnisse D und $(1 - D)$ unbestimmt; dagegen sind die Werte $\frac{1}{D}$ und $\frac{1}{1-D}$ vollständig bestimmt, ihr skalarer Bestandteil ist 0. Ebenso sind die Doppelverhältnisse $\frac{D}{D-1}$ und $\frac{D-1}{D}$ noch vollständig bestimmt und haben den skalaren Bestandteil 1.

Fallen die Punkte A_0 und B_0, ebenso C_0 und D_0 zusammen, so werden D und $\frac{D}{D-1}$ je $= 0$, $\frac{1}{D}$ und $\frac{D-1}{D}$ unendlich; die

[1]) Die Bezeichnung „Doppeldifferenz" wurde von Predella eingeführt.

Doppelverhältnisse $1 - D$ und $\frac{1}{1-D}$ sind vollständig bestimmt, ihr skalarer Bestandteil ist 1.

Fallen die drei Kernpunkte B_0, C_0 und D_0 zusammen, so verschwinden in dem Ausdruck für d_0 Zähler und Nenner, für d_1 der Nenner. Soll in diesem Fall noch ein bestimmtes Doppelverhältnis der vier Punkte existieren, so müssen die Koordinaten der Punkte B und D so als Funktionen eines Parameters t gegeben sein, daß sich für d_0 und d_1 bestimmte Grenzwerte ergeben.

22. Schneidet man ein Strahlbüschel mit einer beliebigen dualen Geraden, die nicht durch den Mittelpunkt des Büschels geht, so soll das Doppelverhältnis von vier beliebigen dualen Strahlen des Büschels dasselbe sein wie das der vier Punkte, die von den Strahlen auf der Geraden ausgeschnitten werden.

Ist nun ein Strahlbüschel $(U\,X) = U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0$ gegeben, d. h. sind die drei Größen U_1, U_2, U_3 derart veränderlich, daß sie einer dualen Gleichung

$$U_1 X_1' + U_2 X_2' + U_3 X_3' = 0$$

genügen, so kann man das Strahlbüschel mit der X-Achse zum Schnitt bringen und erhält als Koordinaten der Schnittpunkte die Werte

$$X = -\frac{k^2 \overline{U}_3}{U_1} = -\frac{k^2}{U},$$

wobei X und U inhomogene Punktkoordinaten sind und $k = 1 + \varepsilon$ zu setzen ist.

Das Doppelverhältnis von irgend vier dualen Strahlen des Büschels ist dann gleich dem Doppelverhältnis der vier dualen Schnittpunkte dieser Strahlen mit der X-Achse.

Nun können aber die beiden Größen $U = \frac{U_1}{U_3}$; $V = \frac{U_2}{U_3}$ als inhomogene Koordinaten der Punkte der dualen Geraden

$$X_1' X_1 + X_2' X_2 + X_3' X_3 = 0,$$

die von den Trägern der Strahlen des Büschels $(U\,X) = 0$ durchlaufen wird, betrachtet werden. Vier beliebige Punkte dieser

dualen Geraden müssen dasselbe Doppelverhältnis haben wie ihre Projektionen auf die X-Achse. Das Doppelverhältnis der vier Punkte, die den Werten $(U^{(i)}, V^{(i)})\ i = 1, 2, 3, 4$ entsprechen, ist also $= (U^{(1)}\, U^{(2)}\, U^{(3)}\, U^{(4)})$.

Das Doppelverhältnis der Schnittpunkte der vier entsprechenden Strahlen des Büschels mit der X-Achse und damit das der vier Strahlen selbst ist aber

$$(X^{(1)}\, X^{(2)}\, X^{(3)}\, X^{(4)}) = \left(\frac{-k^2}{U^{(1)}}, \frac{-k^2}{U^{(2)}}, \frac{-k^2}{U^{(3)}}, \frac{-k^2}{U^{(4)}}\right)$$
$$= (U^{(1)}\, U^{(2)}\, U^{(3)}\, U^{(4)}).$$

Daraus folgt der Satz:

Vier Punkte einer dualen Geraden haben dasselbe duale Doppelverhältnis wie die zugehörigen, durch einen dualen Punkt gehenden Netzgeraden; das Doppelverhältnis von vier Strahlen eines dualen Strahlbüschels ist gleich dem Doppelverhältnis ihrer Träger.

23. Unter den Gruppen von je vier dualen Punkten einer Geraden sind die von besonderem Interesse, bei denen die beiden Doppelverhältnisse $(A\, B\, C\, D)$ und $(A\, D\, C\, B)$ einander gleich werden, für die also $D = \frac{1}{D}$ oder $D^2 = 1$ gilt.

Ist $D^2 = 1$, so folgt $D = \pm 1$; der erste Fall tritt auf, wenn B_0 mit D_0 zusammenfällt; es soll hier nur der zweite Fall, $D = -1$, näher untersucht werden.

Bei dieser Annahme werden von den übrigen vier Doppelverhältnissen ebenfalls je zwei einander gleich, nämlich

$$\frac{D}{D-1} = \frac{1}{1-D} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad 1 - D = \frac{D-1}{D} = 2.$$

Bei allen drei verschiedenen Werten des Doppelverhältnisses der vier Punkte verschwindet der vektorielle Bestandteil. Da das Doppelverhältnis der vier Kernpunkte von 0 verschieden ist, muß also die Doppeldifferenz verschwinden.

Derartige duale Punktgruppen werden harmonisch genannt. Vier duale Punkte einer Geraden liegen also harmonisch, wenn die vier Kernpunkte in gewöhnlichem Sinn harmonisch

liegen, und wenn die Doppeldifferenz der vier Punkte verschwindet.

Nimmt man nun A und C bestimmt auf der dualen Geraden an und bestimmt B und D so, daß die vier Punkte harmonisch liegen, so gilt für die gewöhnliche projektive Geometrie und damit auch infolge der hier getroffenen Anordnung der dualen Punkte für die dual-projektive Geometrie, daß die Punkte B und D durch A und C getrennt sein müssen. Sind auch die Kernpunkte B_0 und D_0 so gewählt, daß die vier Kernpunkte harmonisch liegen, so folgt aus der Bedingung $d_1 = 0$, daß die zu B_0 und D_0 gehörigen Bildpunkte noch je eine gewöhnliche Gerade durchlaufen können, und zwar müssen die beiden Punktreihen der Bildpunkte B_1 und D_1 ähnlich sein.

Fällt schließlich B_0 mit C_0 zusammen, so muß dasselbe auch für D_0 gelten. Von harmonischen Punkten kann man in diesem Fall nur sprechen, wenn die am Schluß des Abschnitts 21 aufgestellte Forderung erfüllt ist und die entsprechenden Grenzwerte -1 und 0 sind.

Aus der Forderung $d_1 = 0$ folgt aber, daß B_1 und D_1 nur noch kongruente Punktreihen durchlaufen können, und zwar muß die Strecke $B_1 D_1$ von C_1 halbiert werden.

Aus der hier gegebenen analytischen Definition harmonischer Punkte ergibt sich, daß die Aufgabe, zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt zu bestimmen, konstruktiv in der dualen Geometrie ebenso zu lösen ist wie in der gewöhnlichen Geometrie, nur treten an die Stelle der Ecken und Seiten des vollständigen Vierecks die entsprechenden dualen Elemente. Vier duale Gerade eines Strahlbüschels nennen wir harmonisch, wenn sie durch Schnitt mit einer beliebigen dualen Geraden vier duale harmonische Punkte liefern.

24. Projiziert man die Punkte einer dualen Geraden von einem dualen Punkt aus, dessen Kernpunkt nicht auf der gegebenen Kerngeraden liegt, auf eine zweite duale Gerade, die so erhaltene Punktreihe unter derselben Voraussetzung auf eine dritte usw., so besteht zwischen den inhomogenen Koordinaten $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ ... der dualen Punkte der gegebenen Punktreihe und

den inhomogenen Koordinaten der durch Projektion erhaltenen Punktreihe eine Gleichung von der Form

$$\xi = \frac{AX+B}{CX+D},$$

wobei A, B, C, D duale Konstante sind.

Daraus läßt sich durch eine einfache Rechnung ableiten, daß das duale Doppelverhältnis von vier beliebigen Punkten der einen Reihe gleich dem dualen Doppelverhältnis der vier entsprechenden Punkte der andern Punktreihe ist.

Ordnet man umgekehrt zwei duale Punktreihen einander so zu, daß irgend vier Punkte der einen Reihe dasselbe duale Doppelverhältnis haben wie die vier entsprechenden Punkte der andern Reihe, so muß zwischen den Koordinaten der Punkte beider Reihen eine Gleichung von der Form

$$\xi = \frac{AX+B}{CX+D}$$

bestehen. Der skalare Bestandteil dieser Gleichung bestimmt die Zuordnung der beiden Kernpunktreihen, der vektorielle Bestandteil in Verbindung mit dem skalaren die der Bildpunktreihen.

Sind zwei Kernpunkte einander zugeordnet, und setzt man ihre Koordinaten in den vektoriellen Bestandteil der Gleichung ein, so zeigt sich, daß die beiden zugehörigen einander entsprechenden Bildpunktreihen ähnlich sind. Daraus folgt, daß bei der dual-projektiven Zuordnung einem ausgearteten Punkt wieder ein solcher entspricht.

25. Soll die dual-projektive Zuordnung

$$\xi = \frac{AX+B}{CX+D}$$

eineindeutig sein, so muß der skalare Bestandteil der Determinante

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

von 0 verschieden sein.

Dies ist nur möglich, wenn von den vier dualen Konstanten mindestens zwei von 0 verschiedene skalare Bestandteile haben.

Dividiert man dann auf der rechten Seite der dualen Gleichung Zähler und Nenner mit einer solchen dualen Größe, so sieht man, daß die dual-projektive Zuordnung durch sechs wesentliche Konstante bestimmt ist. Diese ergeben sich aus der Zuordnung von drei Paaren dualer Punkte mit verschiedenen Kernpunkten eindeutig.

Haben von den drei dualen Punkten beider Punktreihen je zwei einen gemeinsamen Kernpunkt, so hat man zur Bestimmung der sechs Konstanten nur fünf Gleichungen. Aus der besonderen Form dieser Gleichungen folgt aber, daß die projektive Zuordnung der Kernpunktreihen dadurch vollständig, die der Bildpunkte dagegen nur für die beiden zu den gegebenen Kernpunkten gehörigen Bildpunktreihen bestimmt ist.

Es gibt ∞^1 dual-projektive Zuordnungen, bei denen die gegebenen Punkte einander entsprechen.

26. Haben die beiden dual-projektiven Punktreihen dieselbe duale Gerade als Träger, so können einzelne duale Punkte mit ihren zugeordneten zusammenfallen. Derartige Punkte sollen duale Doppelpunkte der beiden kollokalen dualen Punktreihen oder auch invariante Punkte der dual-projektiven Transformation $\xi = \frac{AX+B}{CX+D}$ der Geraden heißen; sie ergeben sich aus der dualen Gleichung

$$X = \frac{AX+B}{CX+D}.$$

Der skalare Bestandteil dieser Gleichung ist

$$c_0 x^2 + (d_0 - a_0) x = b_0.$$

Man hat somit folgende Fälle zu unterscheiden:

1. $(a_0 - d_0)^2 + 4 b_0 c_0 > 0$.

Die beiden Kernpunktreihen haben zwei verschiedene reelle invariante Punkte. Führt man deren Koordinaten in den vektoriellen Bestandteil der Gleichung ein, so erhält man je einen zugehörigen gemeinsamen Bildpunkt.

Aus dem Schluß des Abschnitts 24 folgt aber, daß die beiden zu einem gemeinsamen Kernpunkt gehörigen Bildpunktreihen, die ebenfalls kollokal sind, als ähnliche Punktreihen auch noch den unendlich fernen Punkt gemeinsam haben müssen.

Die beiden dualen Punktreihen haben also außer zwei gewöhnlichen dualen Punkten auch noch zwei ausgeartete Punkte gemeinsam.

2. $(a_0 - d_0)^2 + 4 b_0 c_0 < 0$.

Dieser Fall ist dem vorigen analog, nur sind die gemeinsamen Elemente imaginär.

3. $(a_0 - d_0)^2 + 4 b_0 c_0 = 0$.

a) Die beiden Kernpunktreihen haben nur den einen gemeinsamen Punkt $x = \frac{a_0 - d_0}{2 c_0}$.

Die Koordinaten zweier entsprechender Bildpunktreihen sind durch die Gleichung

$$\eta = y - \frac{c_1 x^2 + (d_1 - a_1) x - b_1}{c_0 x + d_0}$$

oder

$$\eta = y - \varphi(x)$$

verbunden.

Diese kongruenten Bildpunktreihen sind für $x = \frac{a_0 - d_0}{2 c_0}$ kollokal. Ist nun für $x = \frac{a_0 - d_0}{2 c_0}$

α) $\varphi(x) \neq 0$, so können die beiden Punktreihen nur den unendlich fernen Punkt gemeinsam haben. Die kollokalen dualen Punktreihen haben dann nur einen ausgearteten invarianten Punkt;

β) $\varphi(x) = 0$, so sind die Bildpunktreihen identisch, und die dualen Punktreihen haben alle Punkte mit dem Kernpunkt

$$x = \frac{a_0 - d_0}{2 c_0}$$

gemeinsam.

b) Die beiden Kernpunktreihen sind identisch.

Die zu den einzelnen Kernpunkten gehörigen Bildpunktreihen sind stets kollokal und kongruent. Die beiden dualen Punktreihen müssen daher alle ausgearteten Punkte gemeinsam haben, außerdem aber alle dualen Punkte, für die die Koordinate x des Kernpunktes der Gleichung $\varphi(x) = 0$ genügt. Ist also

α) $(a_1 - d_1)^2 + 4 b_1 c_1 > 0$, so ergeben sich zwei reelle Kernpunkte für die auch alle Bildpunkte identisch sind;

β) $(a_1 - d_1)^2 + 4 b_1 c_1 < 0$, so sind diese gemeinsamen Punkte imaginär;

γ) $(a_1 - d_1)^2 + 4 b_1 c_1 = 0$, so ergibt sich ein System von ∞^1 gemeinsamen dualen Punkten mit dem Kernpunkt $x = \frac{a_1 - d_1}{2 c_1}$.

Verschwindet aber $\varphi(x) = 0$ identisch, ist also $a_1 = d_1$ und $b_1 = c_1 = 0$, so sind die beiden kollokalen dualen Punktreihen identisch.

Da sich diese Ausführungen ohne weiteres auf kollokale dual-projektive Strahlbüschel übertragen lassen, bedürfen die Fälle transfiniter oder unendlich ferner Doppelpunkte keiner besonderen Untersuchung. Die Aufgabe kann dann durch Übergang zu den zugehörigen Netzen, die zwei kollokale dual-projektive Büschel bilden müssen, erledigt werden.

Aus dieser Untersuchung folgt der Satz:

Haben zwei dual-projektive kollokale Punktreihen drei gewöhnliche (nicht ausgeartete) duale Punkte mit verschiedenen Kernpunkten gemeinsam, so sind sie identisch.

Ein entsprechender Satz gilt für kollokale duale Strahlbüschel.

27. Nach Abschnitt 24 entsprechen in zwei dual-projektiven Punktreihen irgend vier harmonischen Punkten der einen Reihe wieder vier harmonische Punkte der andern Reihe. Dagegen gilt in der dualen Geometrie die Umkehrung, d. h. die v. Staudtsche Definition [1]) projektiver Grundgebilde erster Stufe, nicht mehr [2]).

Um diese Tatsache näher zu charakterisieren, sollen alle Transformationen der Punkte einer dualen Geraden, die harmonische Punkte wieder in harmonische Punkte überführen, bestimmt werden. Es sollen also vier Punkten der einen Punktreihe mit dem dualen Doppelverhältnis $d_0(1 + d_1 \varepsilon)$ vier duale Punkte der andern Reihe, deren Doppelverhältnis $d_0(1 + k d_1 \varepsilon)$ ist, entsprechen; die beiden Kernpunktreihen müssen daher im gewöhnlichen Sinn projektiv sein.

Ist nun die Doppeldifferenz von vier beliebigen dualen

---

[1]) Reye, Geometrie der Lage, Bd. 1, S. 48.

[2]) Predella, Saggio di Geometria, Nota II.

Punkten $X^{(i)} = x^{(i)} + y^{(i)}\varepsilon$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ der ersten Reihe $= d_1$, die der entsprechenden Punkte $\xi^{(i)} = \xi_1^{(i)} + \eta_1^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ der andern Punktreihe $= k\,d_1$, so kann man die zweite Punktreihe einer Transformation $\xi' = \xi_1 + \frac{\eta_1}{k}\varepsilon$ unterwerfen, so daß die Doppeldifferenz der vier transformierten Punkte $\xi'^{(i)}$ dieselbe wird wie die der Punkte $X^{(i)}$.

Dann muß aber zwischen den Koordinaten $X^{(i)}$ und $\xi'^{(i)}$ eine Gleichung von der Form

$$\xi'^{(i)} = \frac{A\,X^{(i)} + B}{C\,X^{(i)} + D}$$

bestehen. Daraus ergibt sich als allgemeine Transformation, die harmonische duale Punkte einer Geraden wieder in solche überführt

$$\xi_1 + \frac{\eta_1}{k}\varepsilon = \frac{AX + B}{CX + D}.$$

Da k eine beliebige reelle Größe sein kann, ist diese Transformation von sieben wesentlichen Parametern abhängig.

Falls der skalare Bestandteil der Determinante $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$ von 0 verschieden ist, enthält die Gleichung auch alle zu der angegebenen inversen Transformationen; sie stellt daher eine Gruppe dar, die die Gruppe G_7 der radial-projektiven Transformationen der Geraden heißt[1]).

Die dual-projektiven Transformationen der Geraden, die das Doppelverhältnis von vier beliebigen dualen Punkten invariant lassen, bilden eine Untergruppe G_6 dieser Gruppe G_7.

28. In der gewöhnlichen Geometrie können die projektiven Transformationen in folgender Form definiert werden:

Jede durch differenzierbare Gleichungen gegebene Punkttransformation der Ebene, die Gerade wieder in Gerade überführt, ist eine projektive Transformation[2]).

---

[1]) Die Bezeichnung „radial-projektiv" stammt von E. Study, Geometrie der Dynamen § 26.

[2]) Lie-Scheffers, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen S. 32.

Überträgt man diese Definition in die duale Geometrie und bestimmt die Transformationsgleichungen, durch die duale Gerade stets wieder in duale Gerade übergeführt werden, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\varrho X_1' &= A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3\\ \varrho X_2' &= B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3\\ \varrho X_3' &= C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3,\end{aligned}$$

wobei

$$X_1 = x_1 + y_1\varepsilon \text{ usw.}, \quad X_1' = x_1' + k y_1' \cdots, \quad A_1, A_2 \cdots$$

duale Konstante sind; ϱ ist ein dualer Proportionalitätsfaktor, k ein reeller Parameter[1]).

Diese Transformationsgruppe, für die der skalare Bestandteil der Transformationsdeterminante von 0 verschieden sein muß, ist von 17 wesentlichen Parametern abhängig; sie wird die Gruppe G_{17} der radial-projektiven Transformationen der Ebene genannt[2]).

Die Transformationen dieser Gruppe lassen das Doppelverhältnis von vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe nicht invariant, sondern ordnen vier Elementen mit dem Doppelverhältnis $d_0(1 + d_1\varepsilon)$ vier andere zu, deren Doppelverhältnis

$$d_0\left(1 + \frac{d_1\varepsilon}{k}\right)$$

ist. Soll bei den Transformationen auch das duale Doppelverhältnis invariant bleiben, so muß $k = 1$ gesetzt werden. Man erhält so eine Untergruppe G_{16} der Gruppe G_{17} der radial-projektiven Transformationen. Man nennt G_{16} die Gruppe der dual-projektiven Transformationen der Ebene.

29. Wir sind jetzt in der Lage, an Stelle der bisher verwendeten dualen Koordinaten projektive Koordinaten einzuführen.

---

[1]) Die Ableitung dieser Transformationsgleichungen erfolgt analog der für die gewöhnliche projektive Gruppe, sie kann daher hier unterdrückt werden (Lie-Scheffers S. 33ff.).

[2]) Study, Geometrie der Dynamen § 26. Die Transformationsgleichungen, die dort für die Strahlengeometrie aufgestellt wurden, sind mit diesen identisch.

Sind auf einer dualen Geraden drei beliebige Punkte A_1, A_2, E mit verschiedenen Kernpunkten gegeben, so ist der vierte Punkt P, der mit den drei gegebenen ein vorgeschriebenes duales Doppelverhältnis hat, eindeutig bestimmt.

Bezeichnet man A_1P, A_1E, A_2P, A_2E mit p_1, e_1, p_2, e_2, so ist

$$D = (A_2 E A_1 P) = \frac{p_1}{e_1} : \frac{p_2}{e_2}.$$

Setzt man $\frac{p_1}{e_1} = \varrho X_1$; $\frac{p_2}{e_2} = \varrho X_2$, wo ϱ ein dualer Proportionalitätsfaktor ist, so folgt

$$D = X_1 : X_2,$$

und es sollen die dualen Größen X_1, X_2 die homogenen projektiven Koordinaten des Punktes P genannt werden.

Ist $X_1 = 0$, so fällt der Punkt P mit A_1, ist $X_2 = 0$, so fällt er mit A_2 zusammen. Soll P nach E rücken, so muß

$$\varrho X_1 = 1 \quad \text{und} \quad \varrho X_2 = 1$$

sein. Fällt P ins Unendliche, so werden die Werte ϱX_1 und ϱX_2 selbst unendlich, aber der Grenzwert $\lim (X_1 : X_2)$ ist bestimmt; er ist $= \frac{e_2}{e_1}(1 + k\varepsilon)$, wobei k eine gewöhnliche reelle Zahl bedeutet, die selbst durch Grenzübergang zu bestimmen ist.

Man kann daher die homogenen projektiven Koordinaten X_1 und X_2 als die in verschiedenen Einheiten gemessenen dualen Abstände des Punktes P von den beiden Fundamentalpunkten A_1 und A_2 auffassen.

Je nach der Lage der drei gegebenen Punkte A_1, A_2 und E ergeben sich spezielle Koordinatensysteme. Wählt man z. B. für A_2 den unendlich fernen Punkt, so wird für alle im Endlichen gelegenen Punkte P der Grenzwert von $\frac{p_2}{e_2} = 1$; man erhält also $X_1 : X_2 = \frac{p_1}{e_1}$.

Wird E noch so gewählt, daß $e_1 = 1 + \varepsilon$ ist, so bedeutet p_1 die bisher benützte inhomogene Koordinate des Punktes P.

Auch in der Ebene kann man analog der gewöhnlichen Geometrie projektive Koordinaten einführen.

Wählt man in der Ebene vier duale Punkte A_1, A_2, A_3 und E mit verschiedenen Kernpunkten so, daß keine drei Kernpunkte in gerader Linie liegen, und verbindet die Punkte durch duale Gerade, so kann jeder duale Punkt der Ebene als Schnittpunkt zweier dualer Geraden durch A_1 und A_2, durch A_2 und A_3, oder durch A_3 und A_1 aufgefaßt werden.

Verbindet man einen solchen Punkt P mit den drei Fundamentalpunkten A_1, A_2 und A_3, so ist P vollständig bestimmt, wenn man die Doppelverhältnisse der vier dualen Strahlen zweier Fundamentalpunkte kennt. Um homogene Koordinaten zu bekommen, benützen wir auch noch das Doppelverhältnis der vier dualen Strahlen des dritten Fundamentalpunktes.

Da nach Abschnitt 18 in der dualen Geometrie die Sätze über Proportionen gelten, können die drei Doppelverhältnisse in folgender Form dargestellt werden:

Man legt durch E und P die dualen Geraden senkrecht[1]) zu den drei Fundamentalgeraden a_1, a_2, a_3 und bezeichnet die entsprechenden Abstände mit e_1, e_2, e_3 bezw. p_1, p_2, p_3. Dann sind die dualen Doppelverhältnisse

$$\text{der Strahlen durch } A_1 : D_1 = \frac{p_2}{e_2} : \frac{p_3}{e_3},$$

$$\text{der Strahlen durch } A_2 : D_2 = \frac{p_3}{e_3} : \frac{p_1}{e_1},$$

$$\text{der Strahlen durch } A_3 : D_3 = \frac{p_1}{e_1} : \frac{p_2}{e_2},$$

Setzt man noch $\frac{p_1}{e_1} = \varrho X_1$, $\frac{p_2}{e_2} = \varrho X_2$, $\frac{p_3}{e_3} = \varrho X_3$, so kann man die dualen Größen X_1, X_2, X_3 die homogenen projektiven Koordinaten des dualen Punktes P nennen.

Die drei Doppelverhältnisse sind dann

---

[1]) Allgemein kann man jeder der drei Fundamentalgeraden eine beliebige Richtung zuordnen und dann durch E und P die entsprechenden Parallelen ziehen.

$$D_1 = X_2 : X_3, \quad D_2 = X_3 : X_1, \quad D_3 = X_1 : X_2,$$

und es besteht die Beziehung

$$D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 = 1.$$

Die drei homogenen Koordinaten X_1, X_2, X_3 können als die drei in verschiedenen Einheiten gemessenen dualen Abstände des Punktes P von den drei Fundamentalgeraden betrachtet werden.

Fällt der Punkt P auf die Fundamentalgerade a_1, so ist $X_1 = 0$; für $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ rückt er nach A_3; Entsprechendes gilt für die Geraden a_2 und a_3 und die Punkte A_1 und A_2.

Durchwandert ein dualer Punkt eine duale Gerade, so genügen seine Koordinaten einer linearen dualen Gleichung von der Form $U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0$.

Wir nennen wieder den Punkt (U_1, U_2, U_3) den Träger der dualen Geraden, diese das Netz des Punktes.

Die drei Fundamentalgeraden haben die Gleichungen

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0;$$

ihre Träger sind die Gegenecken des Fundamentaldreiecks.

Die anfangs eingeführten homogenen Koordinaten lassen sich nun leicht als Spezialfall dieser homogenen projektiven Koordinaten ableiten.

Wählt man A_1 und A_2 so auf der unendlich fernen dualen Geraden, daß ihre beiden Netze, d. h. die Fundamentalgeraden a_1 und a_2, aufeinander senkrecht stehen, so wird, falls E im Endlichen liegt, für alle im Endlichen gelegenen Punkte P der Wert

$$\frac{p_3}{e_3} = 1.$$

X_1, X_2, X_3 sind die früher eingeführten homogenen, ϱX_1, ϱX_2 für $\varrho = 1 : \overline{X}_3$ die inhomogenen Koordinaten des dualen Punktes.

Für dieses Koordinatensystem läßt sich noch eine interessante metrische Eigenschaft nachweisen.

Es sei ein Punkt (X_1', X_2', X_3') gegeben. Legt man durch diesen dualen Punkt P ein Strahlbüschel und bringt es mit dem dualen Einheitskreis

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0,$$

der geometrisch durch den gewöhnlichen Einheitskreis und alle seine Tangenten dargestellt wird, zum Schnitt, bestimmt zu beiden Schnittpunkten und P auf jeder dualen Geraden den vierten harmonischen Punkt, so erfüllen diese vierten harmonischen Punkte eine duale Gerade mit der Gleichung

$$X_1 X_1' + X_2 X_2' - X_3 X_3' = 0;$$

sie heiße die duale Polare des Punktes P.

Diese Gerade ist nach der früheren Bezeichnungsweise das Netz des Punktes $(X_1', X_2', -X_3')$, der aus P durch Spiegelung am Ursprung hervorgeht.

Für dieses rechtwinklige Koordinatensystem gilt also der Satz:

Das Netz eines dualen Punktes ist die duale Polare seines Spiegelpunktes in bezug auf den dualen Einheitskreis.

Einen Ausdruck der gewöhnlichen Geometrie übertragend kann man $X_1 X_1' + X_2 X_2' + X_3 X_3' = 0$ auch die zum dualen Punkt (X_1', X_2', X_3') polarreziproke duale Gerade nennen.

III. Die Geometrie dualer Größen und die Strahlengeometrie des Raums.

30. In den bisherigen Entwicklungen wurde von den sechs Größen $(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$ nur vorausgesetzt, daß sie nicht alle gleichzeitig verschwinden.

Um nun Beziehungen zu andersartigen Untersuchungen herzustellen, fassen wir die Größen als Plückersche Linienkoordinaten einer Geraden im Raum auf, setzen also

$$x_i = X_{0i}\,(i = 1, 2, 3);\quad y_1 = X_{23};\quad y_2 = X_{31};\quad y_3 = X_{12}.$$

Dann können die homogenen Koordinaten X_1, X_2, X_3 des dualen Punktes der Ebene zugleich als Studysche Strahlenkoordinaten betrachtet werden[1]). Da sie noch mit einem beliebigen dualen Faktor multipliziert werden können, kann man sie auch der Bedingung $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$ unterwerfen.

Dann kommt man auf folgende Weise zu einem räumlichen System von ∞^4 dualen Punkten:

Die Gleichung zerfällt in die beiden gewöhnlichen Gleichungen

$$X_{01}^2 + X_{02}^2 + X_{03}^2 = 1,$$
$$X_{01}X_{23} + X_{02}X_{31} + X_{03}X_{12} = 0,$$

von denen die zweite auch in der Form

$$X_{01}(X_{01} + X_{23}) + X_{02}(X_{02} + X_{31}) + X_{03}(X_{03} + X_{12}) = 1$$

geschrieben werden kann.

Setzt man nun

$$X_{01} = x_0, \qquad X_{01} + X_{23} = x_1,$$
$$X_{02} = y_0, \qquad X_{02} + X_{31} = y_1,$$
$$X_{03} = z_0, \qquad X_{03} + X_{12} = z_1,$$

und faßt (x_0, y_0, z_0) bezw. (x_1, y_1, z_1) als inhomogene Koordinaten

---

[1]) Geometrie der Dynamen § 23.

des Kernpunkts P_0 bezw. des Bildpunkts P_1 eines dualen Raumpunkts auf; so stellt die duale Gleichung

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$$

ein System von ∞^4 dualen Punkten dar, deren Kernpunkte auf der Kugel vom Radius 1 liegen, deren Bildpunkte alle Tangentialebenen der Kugel erfüllen. Wir nennen $P = P_0 P_1$ einen Punkt der dualen Kugel

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1.$$

Dieses räumliche Punktsystem kann man einerseits mit dem im ersten Teil entwickelten dualen Punktsystem der Ebene, andererseits mit den ∞^4 Strahlen des Raums in Beziehung bringen.

Um die erste Aufgabe zu erledigen, werde durch einen Punkt $P_0 P_1$ und den Nullpunkt des räumlichen Koordinatensystems[1]) eine duale Gerade gelegt und diese mit der Tangentialebene $z = 1$ der Kugel zum Schnitt gebracht.

Hat der duale Punkt die Koordinaten

$$\begin{aligned} X_1' &= x_0' + x_1'\varepsilon = X_{01} + (X_{01} + X_{23})\varepsilon, \\ X_2' &= y_0' + y_1'\varepsilon = X_{02} + (X_{02} + X_{31})\varepsilon, \\ X_3' &= z_0' + z_1'\varepsilon = X_{03} + (X_{03} + X_{12})\varepsilon, \end{aligned}$$

so lauten die Gleichungen der dualen Geraden durch O und $P_0 P_1$:

$$\frac{X_1}{X_1'} = \frac{X_2}{X_2'} = \frac{X_3}{X_3'}.$$

Um ihren Schnittpunkt mit der Ebene $z = 1$ zu erhalten, hat man $X_3 = z_0 + z_1\varepsilon = 1 + \varepsilon$ zu setzen und erhält

$$X_1 = \frac{X_1'}{X_3'}(1+\varepsilon) = \frac{X_{01}}{X_{03}} + \left(\frac{X_{01}}{X_{03}} + \frac{X_{03}X_{23} - X_{01}X_{12}}{X_{03}^2}\right)\varepsilon$$

$$X_2 = \frac{X_2'}{X_3'}(1+\varepsilon) = \frac{X_{02}}{X_{03}} + \left(\frac{X_{02}}{X_{03}} + \frac{X_{03}X_{31} - X_{02}X_{12}}{X_{03}^2}\right)\varepsilon.$$

Dies sind aber gerade die Werte, die man erhält, wenn man

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{01} + X_{23}\varepsilon, \\ X_2 &= X_{02} + X_{31}\varepsilon, \\ X_3 &= X_{03} + X_{12}\varepsilon \end{aligned}$$

als homogene Koordinaten des dualen Punktes der Ebene auf-

[1]) Mittelpunkt der dualen Kugel.

faßt und sie mit $\overline{X}_3$ dividiert; die Quotienten $X_1 : \overline{X}_3$ und $X_2 : \overline{X}_3$ sind die inhomogenen Koordinaten des dualen Punktes der Ebene. Das im ersten Teil entwickelte duale Punktsystem, in dem $X_1 = X_{01} + X_{23}\varepsilon = x_1 + y_1\varepsilon \cdots$ zu setzen ist, ergibt sich, wenn man die dualen Punkte der Kugel $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$ vom Mittelpunkt aus auf die Ebene $z = 1$ dual projiziert.

Geometrisch ist diese duale Projektion entsprechend den Ausführungen der Abschnitte 13—15 in folgender Weise auszuführen:

Es sei $P_0 P_1$ der duale Kugelpunkt, P_1 also auf der Tangentialebene des Punktes P_0 gelegen. Man legt durch den Mittelpunkt O der Kugel und P_0 eine Gerade, die die Ebene $z = 1$ im Punkt P_0' schneidet. Sodann legt man durch O und P_1 eine Gerade, die die Ebene durch P_0' parallel zur Tangentialebene des Punktes P_0 in Q schneidet, zieht durch Q eine Parallele zur Geraden O P', die die Ebene $z = 1$ im Punkt P_1' schneidet. Dann ist $P_0' P_1'$ der gesuchte duale Punkt der Ebene mit den homogenen Koordinaten

$$X_1 = X_{01} + X_{23}\varepsilon, \quad X_2 = X_{02} + X_{31}\varepsilon, \quad X_3 = X_{03} + X_{12}\varepsilon.$$

Man kann nun auch die Beziehung zwischen dem dualen Punkt der Ebene und seinem Netz sehr einfach darlegen[1]):

Der dualen Geraden $U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0$ der Ebene entspricht auf der dualen Kugel ein Punktsystem, das derselben Gleichung genügt, es wird also von der dualen Ebene

$$U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0^{2})$$

durch den Ursprung aus der dualen Kugel ausgeschnitten.

Die duale Gerade durch O senkrecht zu dieser Ebene hat die Gleichungen

$$\frac{X_1}{U_1} = \frac{X_2}{U_2} = \frac{X_3}{U_3};$$

sie schneidet die Ebene $z = 1$ in dem dualen Punkt (U_1, U_2, U_3), d. h. in dem Träger der Geraden der Ebene

---

[1]) s. Abschnitt 10.

[2]) Hier sind $X_1 = X_{01} + (X_{01} + X_{23})\varepsilon = x_0 + x_1\varepsilon$ usw. als inhomogene Koordinaten dualer Raumpunkte zu betrachten.

$$U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0.$$

Nennt man das duale Punktsystem der Kugel, das der dualen Geraden der Ebene entspricht, einen dualen Großkreis, so entspricht der Pol dieses Großkreises dem Träger der dualen Geraden.

Die ∞^4 dualen Punkte der Ebene oder der dualen Kugel können nun auf verschiedene Arten den ∞^4 Strahlen des Raums zugeordnet werden.

Die nächstliegende Zuordnung ist die, daß man dem dualen Punkt der Ebene (X_1, X_2, X_3) den Strahl mit denselben Study-schen Strahlenkoordinaten zuordnet. Ist also ein Strahl (X_1, X_2, X_3) gegeben, so multipliziert man die drei Größen mit einem solchen dualen Faktor, daß $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$ wird. Dann entspricht dem Strahl der duale Punkt der Kugel mit den inhomogenen Koordinaten

$$\begin{aligned} x_0 &= X_{01}, & x_1 &= X_{01} + X_{23}, \\ y_0 &= X_{02}, & y_1 &= X_{02} + X_{31}, \\ z_0 &= X_{03}; & z_1 &= X_{03} + X_{12}, \end{aligned}$$

wobei $P_1(x_1\, y_1\, z_1)$ auf der Tangentialebene $x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1 = 1$ des Punktes $P_0(x_0\, y_0\, z_0)$ der Kugel liegt.

Den entsprechenden dualen Punkt der Ebene erhält man durch duale Projektion vom Mittelpunkt der Kugel aus auf $z = 1$.

Die konstruktive Bestimmung des dualen Punktes der Kugel zu einem gegebenen Strahl nimmt folgende Form an:

Die Koordinaten des Schnittpunktes des Strahls mit der y-z-Ebene seien y und z, seine Richtungskoeffizienten a, b, c [1]). Dann kann man einen zweiten Punkt auf dem Strahl mit den Koordinaten a, $y + b$, $z + c$ bestimmen, erhält also für die Plückerschen Koordinaten die Werte:

$$\begin{aligned} X_{01} &= a, & X_{23} &= cy - bz, \\ X_{01} &= b, & X_{31} &= az, \\ X_{03} &= c, & X_{12} &= -ay. \end{aligned}$$

Der Kernpunkt des zugeordneten dualen Punktes der Kugel ergibt sich dann, wenn man durch O eine Parallele zu dem

---

[1]) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Strahl zieht und mit der Kugel $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$ zum Schnitt bringt.

Der Bildpunkt hat die Koordinaten:

$$x_1 = cy - bz + a,$$
$$y_1 = az + b,$$
$$z_1 = -ay + c;$$

er liegt also auf der Ebene $ax_1 + by_1 + cz_1 = 1$.

Da eine Gerade durch 0 die Kugel in zwei Punkten schneidet, ist die Zuordnung noch nicht eindeutig. Um eine eindeutige Zuordnung zu erhalten, muß man die Geraden orientieren. Dies erfolgt durch Festsetzung des Wurzelwerts

$$X_0 = \pm 1\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}.$$

Die dualen Punkte der Kugel sind dann eineindeutig den Speeren[1]) des Raums zugeordnet, dagegen entspricht beiden Speeren einer Geraden derselbe duale Punkt der Ebene.

Da andererseits die Identitäten, auf die sich die analytische Behandlung der sphärischen Trigonometrie gründet, ihre Gültigkeit behalten, wenn man die in ihnen auftretenden Größen durch duale Größen ersetzt, so läßt sich im Anschluß an die obige Auffassung eine sphärische Trigonometrie der dualen Kugel und damit eine Trigonometrie des Speerraums entwickeln[2]) [3]).

Eine zweite Abbildung der orientierten Geraden des Raums ergibt sich, wenn man dem dualen Punkt der Kugel $P_0(x_0\,y_0\,z_0)\,P_1(x_1\,y_1\,z_1)$, wo $x_1 = x_0 + x$, $y_1 = y_0 + y$, $z_1 = z_0 + z$ zu setzen ist, den Speer mit den Plückerschen Koordinaten

$$X_{01} = x_0, \qquad X_{23} = z_0\,y - y_0\,z,$$
$$X_{02} = y_0, \qquad X_{31} = x_0\,z - z_0\,x,$$
$$X_{03} = z_0, \qquad X_{12} = y_0\,x - x_0\,y$$

zuordnet. In diesem Fall ist der Bildpunkt P_1 der Schnittpunkt des Strahls mit der Tangentialebene in P_0. Die Abbildung

---

[1]) Speer = orientierte Gerade, nach einer Bezeichnung von E. Study.

[2]) Study, Geometrie der Dynamen § 23, 17a u. 18a.

[3]) Grünwald, Duale Zahlen in der Geometrie § 11 (Monatshefte für Mathematik und Physik 1906). Grünwald ordnet die dualen Zahlen den Minimalebenen des Euklidischen Raums und auf diese Weise deren Trägern, den Speeren des Raums, zu.

kann als Erweiterung der sphärischen Abbildung der Strahlen betrachtet werden[1]).

31. Den folgenden Abschnitten wird die erste Art der Zuordnung von Strahlen des Raums und dualen Punkten zugrunde gelegt; es soll also dem Strahl mit den Studyschen Strahlenkoordinaten X_1, X_2, X_3 der duale Punkt der Ebene mit den homogenen Koordinaten X_1, X_2, X_3 entsprechen.

Bei dieser Abbildung geht ein eigentliches Liniengebüsch, d. h. Die Gesamtheit der ∞^2 Strahlen, die einen eigentlichen Strahl rechtwinklig schneiden, in eine duale Gerade über; dem Träger des Liniengebüschs ist der Träger der dualen Geraden zugeordnet. Einem Parallelenbüschel entsprechen ∞^1 duale Punkte mit gemeinsamem Kernpunkt, deren Bildpunkte auf einer Geraden liegen; einem Parallelenbündel alle ∞^2 dualen Punkte mit gemeinsamem Kernpunkt.

Insbesondere ordnen sich die ∞^3 transfiniten Punkte den ∞^3 Strahlen zu, die die z-Achse rechtwinklig kreuzen, die ∞^2 unendlich fernen Punkte dagegen den ∞^2 Strahlen, die die z-Achse rechtwinklig schneiden. Den 3 Achsen des räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems entsprechen die 3 Eckpunkte des ebenen Koordinatensystems, das von der X_1-Achse, der X_2-Achse und der unendlich fernen Geraden gebildet wird.

Die uneigentlichen Strahlen sind den ausgearteten dualen Punkten zugeordnet. Soll diese Zuordnung ebenfalls eindeutig sein, so muß jeder uneigentliche Strahl als Grenzstrahl eines bestimmten Parallelenbüschels definiert werden[2]), nicht als Schnittgerade einer eigentlichen mit der unendlich fernen Ebene.

Sind A und B duale Punkte der Ebene, die den Strahlen

---

[1]) S. Lie stellte zwei andersartige Abildungen der Geraden des Raums auf; bei ihnen entspricht einer Geraden eine Kugel. Die 1. Liesche Geraden-Kugeltransformation ergibt sich, wenn man einem Punkt des Raums eine Tangente einer singularitätenfreien Fläche 2. Ordnung zuordnet, dieser Geraden aber umgekehrt 2 Punkte des Raumes. Bei der 2. dagegen wird jedem Punkt eine Treffgerade des Grundkegelschnitts zugeordnet und dieser umgekehrt nur ein Punkt. S. H. Beck, Die beiden Geraden-Kugeltransformationen von Sophus Lie; 1917.

[2]) s. auch Study, Geometrie der Dynamen § 27.

g_1 und g_2 des Raumes zugeordnet sind, so entspricht die duale Gerade durch A und B dem Liniengebüsch, dessen Träger die Gerade ist, die g_1 und g_2 rechtwinklig schneidet, von dem also g_1 und g_2 Querlinien sind.

32. Die vorausgehenden Überlegungen ermöglichen uns, die Geometrie der Strahlenkomplexe und Strahlenkongruenzen in der Ebene zu entwickeln.

Um eine Strahlenkongruenz analytisch darzustellen, schneidet man sie mit einer Fläche, die alle Strahlen trifft; man nennt sie die Leitfläche. Sind die Gleichungen der Leitfläche in den Parametern u und v gegeben, so lassen sich auch die 6 Plückerschen Koordinaten jedes Strahls und damit die Studyschen Strahlenkoordinaten in diesen Parametern bestimmen [1]).

Die Koordinaten der entsprechenden dualen Punkte sind dann ebenfalls in den beiden Parametern u und v dargestellt. Bei dieser Abbildung der Strahlenkongruenzen in die Ebene sind vier Fälle möglich:

1. Zu jedem Kernpunkt gehört nur eine endliche Anzahl von Bildpunkten.

2. Zu einem Kernpunkt gehören im allgemeinen ∞^1 Bildpunkte, die eine Kurve, in speziellen Fällen eine Gerade bilden. So liefern z. B. die Normalensysteme abwickelbarer Flächen ein duales Punktsystem, in dem jedem Kernpunkt ∞^1 Bildpunkte, die eine Gerade bilden, zugeordnet sind.

3. Zu einem Kernpunkt gehören alle ∞^2 Bildpunkte.

4. Die Abbildung liefert nur ausgeartete duale Punkte [2]).

Unter diesen Strahlenkongruenzen soll hier nur eine Gruppe näher betrachtet werden, nämlich Kongruenzen, deren Strahlenkoordinaten (X_1, X_2, X_3) einer homogenen Gleichung $f(X_1 X_2 X_3) = 0$ genügen; diese Kongruenzen gehören zur zweiten Gruppe [3]).

33. Jede Strahlenkongruenz, deren Strahlenkoordinaten der Gleichung $f(X_1 X_2 X_3) = 0$ genügen, geht bei der Abbildung in

---

[1]) K. u. V. Kommerell, Theorie der Strahlsysteme §§ 21 ff.

[2]) Diese Einteilung deckt sich inhaltlich mit der von E. Study (Geometrie der Dynamen § 28).

[3]) Unter X_1, X_2, X_3 werden in dieser Abhandlung durchweg Strahlenkoordinaten 1. Art verstanden (Geometrie der Dynamen § 27).

die Ebene in ein duales Punktsystem über, dessen homogene Koordinaten dieselbe Gleichung befriedigen.

Dividiert man die Gleichung mit $X_3 : x_3$, so daß man sie in gewöhnlichen homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 (Kernpunkte) und y_1, y_2, y_3 (Bildpunkte) erhält [1]), so zerfällt sie wieder in zwei gewöhnliche homogene Gleichungen

$$\varphi(x_1\, x_2\, x_3) = 0,$$
$$\psi(y_1\, y_2\, y_3\; x_1\, x_2\, x_3) = 0.$$

Die zweite Gleichung ist in y_1, y_2, y_3 linear und homogen und hat die Form

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot y_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdot y_2 + \omega(x_1\, x_2\, x_3) \cdot y_3 = 0.$$

Die Gleichung $\varphi(x_1\, x_2\, x_3) = 0$ stellt eine Kurve der Ebene dar, die wir die Kernkurve der dualen Kurve nennen wollen; die zweite Gleichung liefert zu jedem bestimmt gewählten Kernpunkt die Bildpunkte, die eine Gerade erfüllen. Aus der Form der Gleichung folgt, daß diese Gerade parallel zur Tangente im Punkt $(x_1, x_2, x_3,)$ der Kernkurve sein muß [2]).

Alle diese Geraden der Bildpunkte, die zu den ∞^1 Kernpunkten gehören, umhüllen eine Kurve, die wir die Bildkurve der dualen Kurve nennen. Sie stimmt im allgemeinen in Ordnung und Klasse nicht mit der Kernkurve überein.

34. Diese allgemeinen Betrachtungen sollen hier an einem speziellen dualen Kurvensystem durchgeführt werden; wir untersuchen die dualen Kurven, deren homogene Koordinaten X_1, X_2, X_3 einer dualen homogenen Gleichung 2. Grads genügen. Diese dualen Kurven ergeben sich durch Abbildung der konischen Kongruenzen $f_2(X_1\, X_2\, X_3) = 0$ in die Ebene [3]).

Die Diskussion der dualen Kurven 2. Grads, deren Gleichungen von der Form sind

$$A_{11} X_1^2 + 2 A_{12} X_1 X_2 + A_{22} X_2^2 + 2 A_{13} X_1 X_3 + 2 A_{23} X_2 X_3 + A_{33} X_3^2 = 0,$$

[1]) $x_3 = y_3$.
[2]) Predella, Saggio di Geometria Non-Archimedea, Nota II.
[3]) Study, Geometrie der Dynamen § 28.

wo X_1, X_2, X_3 duale homogene Punktkoordinaten, A_{11} usw. duale Konstante bedeuten, ist analog der Diskussion der Kernkurven, also der gewöhnlichen Kurven 2. Grads, durchzuführen. Dividiert man die duale Gleichung mit $(\overline{X}_3 : x_3)^2$ und setzt

$$A_{11} = a_{11} + b_{11}\varepsilon; \quad A_{12} = a_{12} + b_{12}\varepsilon \text{ usw.},$$

so lautet das entsprechende gewöhnliche Gleichungssystem in den homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$
$$2y_1[a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3] + 2y_2[a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3]$$
$$+ 2y_3[a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3] + b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2$$
$$+ 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2 = 0\ ^{1}).$$

Wir haben folgende Fälle zu unterscheiden:

I. $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$.

Unter dieser Voraussetzung kann man ähnlich wie in der gewöhnlichen Geometrie durch eine Parallelverschiebung und eine Drehung des Koordinatensystems die duale Gleichung auf die Form bringen

$$C_1X_1^2 + C_2X_2^2 + C_3X_3^2 = 0, \text{ wo } C_1 = c_1 + d_1\varepsilon \text{ usw.}$$

zu setzen ist.

1. Ist nun $c_3 \neq 0$, und setzt man $x_3 = y_3 = 1$, so kann man mit $C_3(1+\varepsilon)^2$ dividieren und erhält die duale Gleichung

$$(c_1' + d_1'\varepsilon)(x_1' + y_1'\varepsilon)^2 + (c_2' + d_2'\varepsilon)(x_2' + y_2'\varepsilon)^2 + 1 = 0,$$

in der x_1', x_2', y_1', y_2' gewöhnliche inhomogene Punktkoordinaten bedeuten.

Die Gleichung der Kernkurve lautet

$$c_1'x_1'^2 + c_2'x_2'^2 + 1 = 0;$$

sie stellt also

eine Ellipse,		beide negativ,
einen imaginären Kegelschnitt,	dar, je nachdem c_1', c_2'	beide positiv sind,
eine Hyperbel		ungleiches Zeichen haben.

[1]) Die Gleichung hat als homogene lineare Gleichung in y_1, y_2, y_3 nur einen Sinn, wenn $x_3 = y_3$ vorausgesetzt wird.

Die Bildkurve stellt man am einfachsten in Linienkoordinaten (u, v) dar. Man erhält sie durch Elimination von ϱ, x_1', x_2' aus den vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho\, u &= 2\, c_1' x_1', \\ \varrho\, v &= 2\, c_2' x_2', \\ \varrho &= d_1' x_1'^2 + d_2' x_2'^2, \qquad \varrho \neq 0 \\ c_1' x_1'^2 + c_2' x_2'^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Die Elimination ergibt

$$c_1' \frac{u^2}{4\, c_1'^2} + c_2' \frac{v^2}{4\, c_2'^2} + \left[\frac{d_1' u^2}{4\, c_1'^2} + \frac{d_2' v^2}{4\, c_2'^2}\right]^2 = 0,$$

also eine Kurve 4. Klasse.

Ist insbesondere $d_1' = c_1'$, $d_2' = c_2'$, so zerfällt diese Kurve 4. Klasse in die zwei Kurven 2. Klasse:

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{4\, c_1'} + \frac{v^2}{4\, c_2'} &= 0 \\ \frac{u^2}{4\, c_1'} + \frac{v^2}{4\, c_2'} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Die erste der beiden Gleichungen stellt zwei Punkte der unendlich fernen Geraden dar, die 2. Gleichung den Kernkegelschnitt in Linienkoordinaten.

2. Ist $c_3 = 0$, so zerfällt die Kernkurve in zwei reelle oder imaginäre Gerade. Man kann dann nicht mit C_3 dividieren, wohl aber mit $\overline{X_3}$, erhält also als Gleichung der Kernkurve

$$c_1 x_1^2 - c_2 x_2^2 = 0.$$

Die Bildpunkte liegen auf den Geraden:

$$y_1 \cdot 2\, c_1 x_1 + y_2 \cdot 2\, c_2 x_2 + d_3 + d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 = 0;$$

man erhält die Gleichung der Bildkurve in Linienkoordinaten durch Elimination von x_1, x_2 und ϱ aus

$$\begin{aligned} \varrho\, u &= 2\, c_1 x_1, \\ \varrho\, v &= 2\, c_2 x_2, \\ \varrho &= d_3 + d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2, \\ 0 &= c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2; \end{aligned}$$

sie lautet also

$$\frac{u^2}{4c_1} + \frac{v^2}{4c_2} = 0.$$

Diese Gleichung stellt zwei Punkte der unendlich fernen Geraden dar. Dies ist auch notwendig, da in diesem Fall die Kernpunkte auf zwei Geraden liegen, die zugehörigen Bildpunkte also zwei Parallelenbüschel bilden müssen.

II. Ist $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, die Kernkurve also keine Mittelpunktkurve, so kann man durch Drehung und nachfolgende Parallelverschiebung je um duale Beträge, die duale Gleichung 2. Grads auf die Form bringen

$$(x_1 + y_1\varepsilon)^2 = (c_1 + d_1\varepsilon)(x_2 + y_2\varepsilon),$$

oder aber, falls $c_1 = 0$ ist, auf die Form

$$(x_1 + y_1\varepsilon)^2 = e_1 + f_1\varepsilon.$$

Im ersten Fall ist die Kernkurve eine Parabel.

Die Bildkurve erhält man aus

$$\begin{aligned} \varrho\, u &= 2x_1, \\ \varrho\, v &= -c_1, \\ \varrho &= -d_1 x_2, \\ 0 &= x_1^2 - c_1 x_2; \end{aligned}$$

sie hat die Gleichung

$$d_1 u^2 - 4v = 0.$$

Im 2. Fall zerfällt die Kernkurve in zwei parallele Gerade, die auch zusammenfallen können ($e_1 = 0$); die Bildpunkte liegen auf zwei Parallelenbüscheln durch denselben unendlich fernen Punkt $v = 0$.

Daß die Bildkurven der dualen Kurven 2. Ordnung im allgemeinen von der 4. Klasse sein müssen, ergibt sich auch aus folgender Überlegung:

Die beiden Gleichungen seien in der Form gegeben

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0, \\ &2y_1[a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3] + 2y_2[a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3] \\ &\quad + 2y_3[a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3] + b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 \\ &\quad + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Geraden der Bildpunkte, die durch einen beliebigen Punkt (ξ, η, ζ) der Ebene gehen, erhält man, wenn man in der 2. Gleichung an Stelle von (y_1, y_2, y_3) diese Werte einsetzt und dann aus beiden Gleichungen die entsprechenden Werte von x_1, x_2, x_3 bestimmt. Es müssen sich im allgemeinen vier verschiedene Wertsysteme ergeben, die in die 2. Gleichung eingesetzt auch vier verschiedene Gerade durch (ξ, η, ζ) liefern. Diese Geraden sind aber Tangenten an die Bildkurve, die also von der 4. Klasse sein muß.

Aus den verschiedenen Gleichungen der Bildkurven folgt übereinstimmend, daß die unendlich ferne Gerade Doppeltangente sein muß.

35. Um die Bildkurve in Punktkoordinaten (y_1, y_2, y_3) darzustellen, sind die homogenen Parameter x_1, x_2, x_3 aus den drei Gleichungen

$$(1)\quad \varphi(x_1 x_2 x_3) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

$$2)\quad \psi(y_1 y_2 y_3,\ x_1 x_2 x_3) \equiv y_1[2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3]x_3 + \cdots + y_3[(2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3)x_3 + b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2] = 0,$$

$$(3)\quad \frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3}{a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3}$$

zu eliminieren. Die Gleichung wird also im allgemeinen von der 8. Ordnung.

Um an einem Beispiel zu zeigen, welche Gestalt die Bildkurve annehmen kann, soll diese für die duale Ellipse

$$\frac{(x_1 + y_1\varepsilon)^2}{(a_0 + a_1\varepsilon)^2} + \frac{(x_2 + y_2\varepsilon)^2}{(b_0 + b_1\varepsilon)^2} - 1 = 0$$

in Parameterform bestimmt werden.

Die Kernkurve mit der Gleichung $\frac{x_1^2}{a_0^2} + \frac{x_2^2}{b_0^2} - 1 = 0$ kann mittels des Parameters t in der Form

$$x_1 = a_0 \cos t,$$
$$x_2 = b_0 \sin t$$

dargestellt werden.

Die Gleichung der Geraden der zu einem Punkt $x_1 x_2$ der Kernkurve gehörigen Bildpunkte lautet dann

$$f(y_1 y_2 t) = y_1 \frac{\cos t}{a_0} + y_2 \frac{\sin t}{b_0} - \frac{a_1 \cos^2 t}{a_0} - \frac{b_2 \sin^2 t}{b_0} = 0.$$

Die Bildkurve ergibt sich durch Elimination von t aus

$$f(y_1 y_2 t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0;$$

oder aber mittels des Parameters t in der Form

$$y_1 = a_0 \cos t \left[\frac{a_1}{a_0} - \sin^2 t \left(\frac{a_0}{a_1} - \frac{b_2}{b_0} \right) \right],$$
$$y_2 = b_0 \sin t \left[\frac{b_2}{b_0} - \cos^2 t \left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{b_2}{b_0} \right) \right].$$

sie ist also **rational**.

Diese Kurve ist im allgemeinen vom höheren als 4. Ordnung.

Quadriert man die beiden Gleichungen und setzt dann

$$\cos^2 t = z, \quad \sin^2 t = 1 - z,$$

so erhält man

$$y_1^2 = \varphi_4(z),$$
$$y_2^2 = \psi_3(z),$$

wo $\varphi_4(z)$ und $\psi_3 z$ Funktionen von z vom 3. Grad sind.

Eliminiert man aus beiden Gleichungen z, so ergibt sich eine Gleichung 8. Grads in y_1 und y_2.

In dieser Gleichung kommen die Größen y_1 und y_2 nur in der Form y_1^2, y_1^4, y_1^6 usw. vor, die Kurve ist also symmetrisch zu den Achsen und zum Ursprung[1]. Aus der Parameterdarstellung der Kurve folgt, daß die Bildkurve für $a_0 = a_1$, $b_1 = b_0$ mit der Kernkurve identisch wird.

Da jede Kurve mit ihrer speziell dualistischen Kurve vom selben Geschlecht ist, müssen allgemein die Bildkurven der dualen Kurven 2. Ordnung vom Geschlecht 0, also rational sein.

[1]) Um Raum zu sparen, wurden die Rechnungen hier weggelassen.

Für besondere Bedeutung für die duale Geometrie ist die duale Kurve $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$; sie entspricht der absoluten Strahlenkongruenz im Raume[1].

Ihre Kernkurve ist der imaginäre Einheitskreis

$$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0,$$

die zugehörigen Kernpunkte liegen auf den imaginären Tangenten dieses Kreises. Die Rückkehrkurve ist also mit der Kernkurve identisch. Diese Kurve

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$$

wird im folgenden der absolute Kreis der dualen Geometrie genannt.

Da die meisten Sätze über gewöhnliche Kurven 2. Ordnung besonders einfache sind auf die projektiven Eigenschaften bezogen, abgesehen von bestimmten Ausnahmefällen, sich auf die duale Kurve 2. Ordnung übertragen lassen, so kann man diese Sätze natürlich auf die konischen Strahlenkongruenzen im Raum übertragen.

Eine duale Gerade schneidet eine duale Kurve 2. Ordnung in zwei verschiedenen dualen Punkten, falls die Kerngerade die Kernkurve in zwei verschiedenen reellen oder imaginären Punkten schneidet, berührt aber die Kerngerade den Kernkegelschnitt, so hat die duale Gerade mit der dualen Kurve entweder nur einen zusammenfallenden Punkt, oder aber ∞^1 duale Punkte mit demselben Kernpunkt, dem Berührungspunkt der Kerngeraden, gemeinsam. Auf die entsprechende Strahlenkongruenz im Raum übertragen lautet der Satz:

Ein Strahlengebüsch hat mit einer konischen Strahlenkongruenz entweder zwei verschiedene reelle oder imaginäre Strahlen, oder nur einen uneigentlichen Strahl, oder ∞^1 Strahlen, die ein Parallelenbüschel bilden, gemeinsam.

Interessante Ergebnisse findet man, wenn man berücksichtigt, daß jede duale Kurve 2. Ordnung als Schnitt zweier dual-pro-

[1]) Study, *Geometrie der Dynamen* § 28.

jektiver Strahlbüschel, deren Träger verschiedene Kernpunkte haben, erzeugt werden kann[1]).

Sind fünf duale Punkte der Ebene mit verschiedenen Kernpunkten gegeben, und verbindet man zwei beliebige von ihnen, etwa A und B, je mit den übrigen drei durch duale Gerade, so ist zu jedem 4. Strahl durch A ein dualer Strahl durch B eindeutig bestimmt, so daß die vier Strahlen durch A dasselbe duale Doppelverhältnis haben wie die vier Strahlen durch B. Je zwei einander entsprechende Strahlen der beiden Büschel schneiden sich in einem Punkt der dualen Kurve 2. Ordnung. Sind nun im Raum fünf beliebige nicht parallele Strahlen S_i $(i = 1, 2, \cdots 5)$ gegeben, so kann man zwei beliebige von ihnen, S_1 und S_2, wählen und dann sowohl die drei Strahlen bestimmen, die S_1 und S_3, S_4, S_5, als auch die drei Strahlen, die S_2 und S_3, S_4, S_5 rechtwinklig schneiden.

Jeder vierte Strahl S_1', der S_1 rechtwinklig schneidet, bestimmt mit den drei anderen Strahlen durch S_1 ein bestimmtes duales Doppelverhältnis, und man kann eindeutig einen Strahl S_2' bestimmen, der S_2 rechtwinklig schneidet und mit den drei anderen Strahlen durch S_2 dasselbe duale Doppelverhältnis hat wie die vier Strahlen durch S_1.

Bestimmt man dann zu S_1' und S_2' den Strahl, der beide rechtwinklig schneidet, so ist dies ein Strahl einer konischen Kongruenz, zu der auch die fünf gegebenen Strahlen gehören.

Von jeder konischen Kongruenz liegen je ∞^1 Strahlen in einem Parallelenbüschel.

Man kann nun zu jedem Parallelstrahlenbüschel einer konischen Kongruenz das Strahlbüschel, das in derselben Ebene liegt und dessen Strahlen die des ersten rechtwinklig schneiden, bestimmen und erhält so eine zweite Kongruenz, die man die zur ersten **reziproke Kongruenz** nennt.

Ist die duale Kurve 2. Ordnung, die der ersten Kongruenz zugeordnet ist, gegeben, so erhält man die entsprechende reziproke Kurve, wenn man zu je ∞^1 dualen Punkten der gegebenen Kurve

---

[1]) Die einfache Ableitung der dualen Kurve 2. Ordnung als Schnitt zweier dual-projektiver Strahlbüschel kann hier übergangen werden.

mit gemeinsamem Kernpunkt die Netze bestimmt und dann deren gemeinsame Punkte. Es müssen dies je wieder ∞^1 Punkte mit gemeinsamem Kernpunkt sein[1]). Die reziproke Kurve, die der reziproken konischen Kongruenz zugeordnet ist, ist wieder eine duale Kurve 2. Ordnung.

Ist eine konische Kongruenz und ein Strahl S_1, der nicht zu der Kongruenz gehört, gegeben, so kann man zu jedem Strahl g_1, der S_1 rechtwinklig schneidet, die zwei Strahlen der Kongruenz bestimmen, die g_1 senkrecht schneiden; es seien dies die Strahlen S_2 und S_3. Dann ist der vierte Strahl, der g_1 rechtwinklig schneidet und mit den Strahlen S_1, S_2, S_3 das Doppelverhältnis -1 bildet, eindeutig bestimmt[2]). Dies gilt für alle ∞^2 Strahlen g_1, die man senkrecht durch S_1 legen kann. Man erhält so ∞^2 Strahlen, die dem Strahl S_1 in bezug auf die konische Kongruenz zugeordnet sind; sie bilden ein Strahlengebüsch, das man die zu S_1 in bezug auf die gegebene Strahlenkongruenz polare Kongruenz nennen kann[3]). In ähnlicher Weise lassen sich andere Sätze der Kurventheorie auf Strahlenkongruenzen übertragen.

38. Insbesondere kann man entsprechend den projektiven Koordinaten des dualen Punktes der Ebene an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten im Raum bezw. der Studyschen Strahlenkoordinaten projektive Strahlenkoordinaten einführen[4]).

Dem Übergang von rechtwinkligen dualen Punktkoordinaten zu dualen Dreieckskoordinaten entspricht dann im Raum der Übergang von drei sich senkrecht schneidenden Koordinatenachsen zu drei beliebigen windschiefen als Fundamentalgeraden. Soll ein Strahl in dem neuen Koordinatensystem eindeutig bestimmt sein, so muß noch ein weiterer Strahl als Einheitsgerade bestimmt werden.

39. Da man die Lage eines starren Körpers im Raum

---

[1]) s. 1. Teil, Abschnitt 8.

[2]) s. 2. Teil, Abschnitt 23; außerdem Study, Geometrie der Dynamen § 26.

[3]) Das Strahlengebüsch entspricht der Polaren eines Punktes S_1 in Bezug auf eine duale Kurve 2. Ordnung.

[4]) Study, Geometrie der Dynamen § 26.

durch die Lage eines mit dem Körper starr verbundenen rechtwinkligen Koordinatensystems definieren kann, spielen die Transformationen im Raum eine ausgezeichnete Rolle, die drei sich senkrecht schneidende Gerade stets wieder in drei solche überführen; es sind dies die ∞^6 Bewegungen im Euklidischen Raum.

Unter Zugrundelegung der hier entwickelten Abbildung der Strahlen des Raums in die dualen Punkte der Ebene kann man die ∞^6 Bewegungen des Raums durch dual-projektive Transformationen der Ebene darstellen.

Den Ecken eines beliebigen dualen Dreiecks entsprechen im Raum drei windschiefe Gerade. Sollen sich die drei entsprechenden Geraden rechtwinklig schneiden, so muß das Dreieck die Eigenschaft haben, daß jede Ecke Träger der dualen Gegenseite des Dreiecks ist. Ein Dreieck, das dieser Forderung genügt, soll ein Somadreieck genannt werden [1]).

Es sind nun die Transformationen zu bestimmen, die ein Somadreieck stets wieder in ein Somadreieck überführen.

Sind drei Gerade

$$\begin{aligned} U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 &= 0, \\ V_1 X_1 + V_2 X_2 + V_3 X_3 &= 0, \\ W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3 &= 0 \end{aligned}$$

gegeben, so lauten die Bedingungen dafür, daß der Schnittpunkt je zweier Geraden Träger der dritten dualen Geraden ist:

$$\text{I} \quad \begin{cases} U_1 V_1 + U_2 V_2 + U_3 V_3 = 0, \\ U_1 W_1 + U_2 W_2 + U_3 W_3 = 0, \\ V_1 W_1 + V_2 W_2 + V_3 W_3 = 0. \end{cases}$$

Durch die dual-projektive Transformation

$$\begin{aligned} \varrho X_1' &= A_{11} X_1 + A_{22} X_2 + A_{33} X_3 \\ \varrho X_2' &= B_{11} X_1 + B_{22} X_2 + B_{33} X_3 \\ \varrho X_3' &= C_{11} X_1 + C_{22} X_2 + C_{33} X_3 \end{aligned}$$

---

[1]) E. Study nennt die Figur von drei sich senkrecht schneidenden Geraden ein Soma (Geometrie der Dynamen, Anhang).

werden die drei Geraden in die neuen dualen Geraden

$$U_1[A_1X_1' + B_1X_2' + C_1X_3'] + U_2[A_2X_1' + B_2X_2' + C_2X_3'] + U_3[A_3X_1' + B_3X_2' + C_3X_3'] = 0$$

usw. übergeführt[1]).

Sollen diese drei neuen Geraden wieder ein Somadreieck bilden, so müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$\text{II} \quad \begin{cases} [A_1U_1 + A_2U_2 + A_3U_3][A_1V_1 + A_2V_2 + A_3V_3] \\ \quad + [B_1U_1 + B_2U_2 + B_3U_3][B_1V_1 + B_2V_2 + B_3V_3] \\ \quad + [C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3][C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3] = 0, \\ [A_1U_1 + A_2U_2 + A_3U_3][A_1W_1 + A_2W_2 + A_3W_3] + \cdots = 0, \\ [A_1V_1 + A_2V_2 + A_3V_3][A_1W_1 + A_2W_2 + A_3W_3] + \cdots = 0. \end{cases}$$

Damit die Gleichungen II immer erfüllt sind, sobald die drei Gleichungen I gelten, müssen zwischen den dualen Parametern der Transformation die Gleichungen bestehen:

$$\text{III} \quad \begin{cases} A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \\ A_1A_3 + B_1B_3 + C_1C_3 = 0, \\ A_2A_3 + B_2B_3 + C_2C_3 = 0, \\ A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 = A_3^2 + B_3^2 + C_3^2. \end{cases}$$

Da zwischen den 16 wesentlichen Parametern der Transformation fünf duale Bedingungsgleichungen bestehen, können nur noch sechs Parameter willkürlich bleiben.

Die dual-projektiven Transformationen der Ebene, deren Parameter den Gleichungen III genügen, bilden also eine Gruppe G_6 von Transformationen, die den Bewegungen im Raum zugeordnet sind.

40. Diese Gruppe G_6 hat eine weitere, der dualen Geometrie charakteristische Eigenschaft.

Stellt man die Bedingungsgleichungen dafür auf, daß eine dual-projektive Transformation den absoluten Kreis[2]) der dualen

---

[1]) Es ist nämlich $X_1 = \frac{\varrho}{\Delta}[A_1X_1' + B_1X_2' + C_1X_3']$, wenn $A_1 = \begin{vmatrix} B_{22} & B_{33} \\ C_{22} & C_{33} \end{vmatrix}$ usw. gesetzt wird.

[2]) Abschnitt 36.

Ebene invariant läßt, so führt eine einfache Rechnung zu den Gleichungen III.

Die Gruppe G_6 läßt also den absoluten dualen Kreis

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$$

nvariant[1]). Diesem Kreis kommt somit in der dualen Geometrie dieselbe Bedeutung zu wie dem absoluten Kreis der gewöhnlichen Geometrie.

---

[1]) Es gibt außerdem eine Gruppe G_7 von radial-projektiven Transformationen, die diesen Kreis ebenfalls invariant lassen; s. Study, Geometrie der Dynamen § 28.

Robert Noske, Borna-Leipzig, Großbetrieb für Dissertationsdruck.